Zur Riemannschen Vermutung und zur Riemannschen Zetafunktion $\zeta(s)$ und zu den Primzahlen

Diese Ausarbeitung ist nur zur persönlichen Information bestimmt.
© Dr. Karl Haller, Sept. 2012 / Nachtrag Juni 2017
www.karl-haller.de · kha@karl-haller.de

Vorbemerkung: In der Zeit nach Riemann wurden etwa ein Dutzend weiterer Zetafunktionen definiert. Sie sind nach dem jeweiligen Schöpfer benannt und haben z. T. gewisse Ähnlichkeiten mit der Riemannschen Zetafunktion. Beispiel: Hurwitzsche Zetafunktion. Wenn im Folgenden kurz die Zetafunktion angesprochen wird, ist immer die Riemannsche Zetafunktion gemeint.

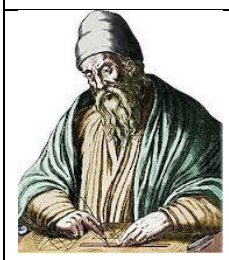
Euklid von Alexandria	Eratosthenes von Kyrene	Leonhard Euler	Carl Friedrich Gauß	Bernhard Riemann
360 bis 280 v. Chr. Unendliche Anzahl der Primzahlen	276 bis 194 v. Chr. Primzahlensieb	1734 bis 1800 Allround-Mathematiker, Basel und St. Petersburg	1777 bis 1865 Mathematikfürst, Göttingen	1826 bis 1866 Riemannsche Vermutung, Göttingen
				

Abbildung 1: Diese Mathematiker haben sich mit Primzahlen beschäftigt

Einige Tafeln aus Internet-Beitrag [1] von *Homer Reid*. Früher am Institute of Technology Massachusetts. http://homerreid.ath.cx/research/talks/ZetaFunction.20080117.pdf. Die PDF-Datei umfasst 58 Tafeln, 495 MB.

Die Grunddefinition der Zetafunktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad \text{Realteil } s > 1 \tag{1}$$

$$\zeta(1) = \pm\infty, \quad \text{Polstelle}$$

$$\zeta(\infty) = 1$$

Von Euler stammt die Produktformel mit Primzahlen:

$$\zeta(s) = \prod_{\text{alle } p} \left(1 - p^{-s}\right)^{-1} \qquad \text{Produkt über alle Primzahlen } p\text{. Realteil } s > 1 \tag{2}$$

Für geradzahlige n hat Euler eine geschlossene Formel mit Bernoulli-Zahlen B_n abgeleitet:

$$\zeta(2\mathrm{n}) = 2^{2n-1}\pi^{2n}\frac{B_n}{(2n)!} \tag{3}$$

$$B_2 = 1/30,\ B_4 = 1/30,\ B_6 = 691/2730,\ B_8 = 3617/510,\ B_{10} = 1174611/330, \ldots.. \tag{4}$$

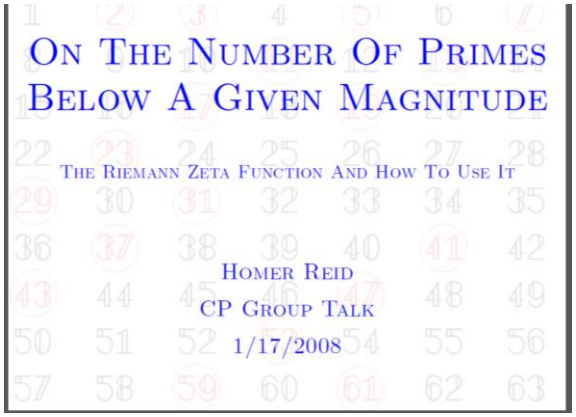
Damit:

$$\zeta(2) = \pi^2/6 = 1{,}644.934\ldots \quad \text{(Basler Problem)}$$
$$\zeta(4) = \pi^4/90 = 1{,}082.323\ldots$$
$$\zeta(6) = \pi^6/945 = 1{,}017.343\ldots$$
$$\zeta(8) = \frac{\pi^8}{9.450} = 1{,}004.077\ldots$$
$$\zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93.555} = 1{,}000.994\ldots$$
$$\zeta(12) = \frac{691\,\pi^{12}}{638.512.875} = 1{,}000.246\ldots$$

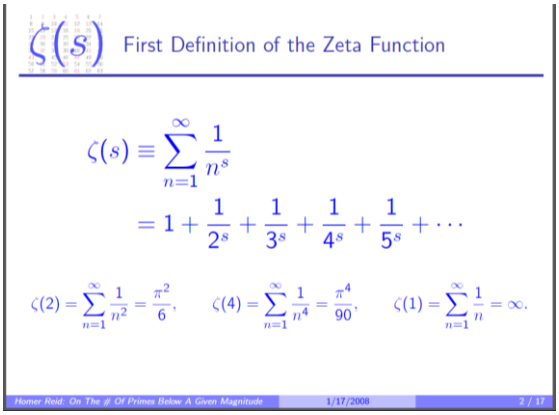
Für ungerade ganzzahlige reelle Werte von ***s*** ist die Berechnung der Zetafunktion $\zeta(\boldsymbol{s})$ nur näherungsweise nur über unendliche Reihen möglich und somit wesentlich aufwändiger. Hier nur ein Beispiel aus [8] für ***s*** = 3 und weitere Angaben:

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} + \ldots = \frac{\pi^3}{28} + \frac{16}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\left(e^{n\pi}+1\right)} - \frac{2}{7}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\left(e^{2n\pi}+1\right)} \approx 1{,}202.056\ldots$$
$$\zeta(5) = 1{,}036.927\ldots$$
$$\zeta(7) = 1{,}008.340\ldots$$
$$\zeta(9) = 1{,}002008\ldots$$

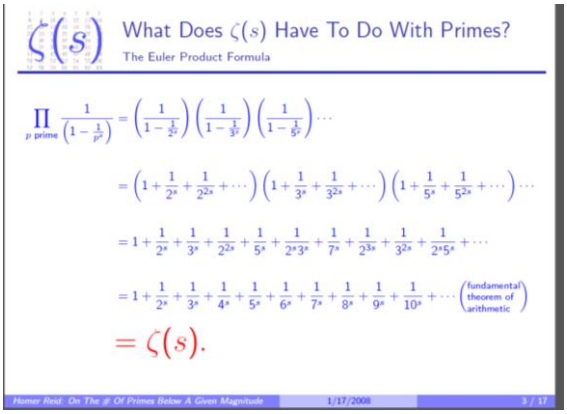
Tafel 1 aus Quelle [1]:

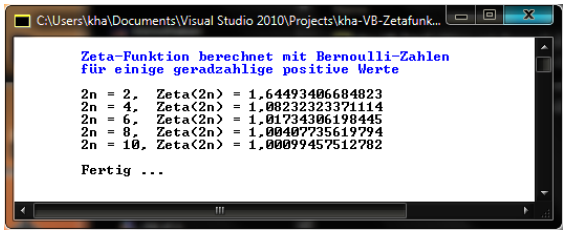


Tafel 3



Tafel 9



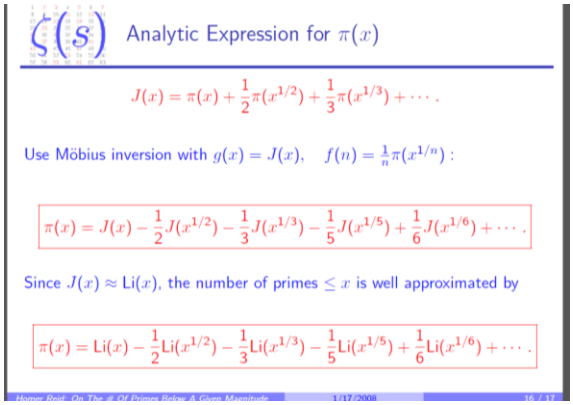


Neben vielen anderen Darstellungen lässt sich die Riemannsche Zetafunktion auch als unendliche Produktreihe aller Primzahlen wie folgt darstellen:

Anzahl der Primzahlen bis zu einem Wert x

RIEMANN wollte die Anzahl $\pi(x)$[1] der Primzahlen bis zu einer bestimmten Größe ≤ *x* angeben und findet:

Tafel 57:



Mit *J*(*x*) ist in der Tafel 57 nicht die Bessel-Funktion gemeint, sondern nach Tafel 11:

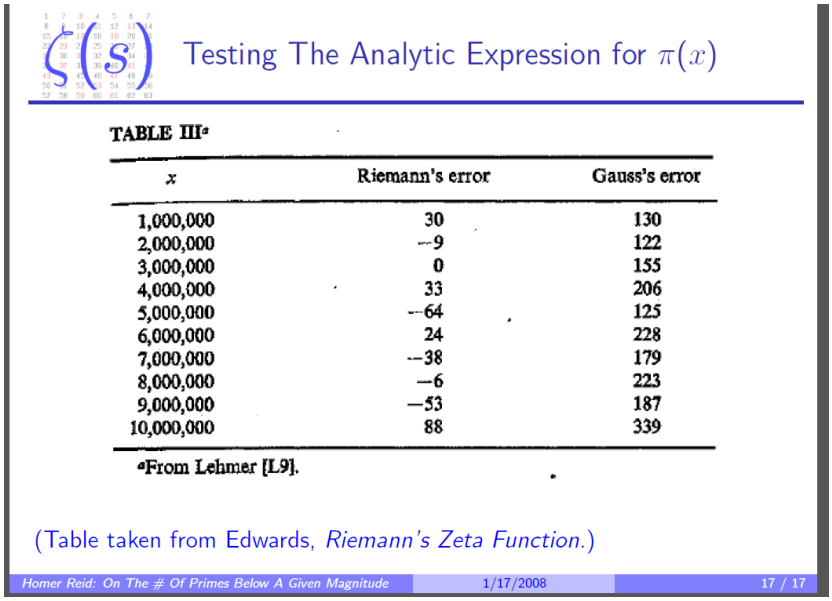
$$J(x) = (\text{number of primes} \leq x) + \frac{1}{2}(\text{number of prime squares} \leq x) + \frac{1}{3}(\text{number of prime cubes} \leq x) + \cdots$$
$$= \pi(x) + \frac{1}{2}\pi(x^{1/2}) + \frac{1}{3}\pi(x^{1/3}) + \cdots$$

Nach Tafel 43 wird *J*(*x*) approximiert durch die *logarithmic integral function* Li(x):

$$\boxed{J(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\log t}.}$$

kha-Hinweis: Das Li-Integral muss von **2** bis x laufen (auch Gauß), nicht ab 0, sonst größere Fehler.

Tafel 58:



Nach [5] beträgt die Anzahl der Primzahlen bis *x* = 1.00.000 exakt 78.498. Die Li-Approximation liefert nach der gleichen Quelle dagegen 78.628, das sind 130 weniger. Damit scheint in Tafel 58 mit Gauß's error die Li-Approximation gemeint zu sein. Was ist dann mit Riemann's error in Tafel 58? Egal wie, bei kleinen *x* können die Fehler relativ groß sein, siehe [5].

[1] Der Funktionsbezeichner $\pi()$ für die Primzahlenanzahlfunktion darf nicht mit der Kreiszahl π = 3,14159... verwechselt werden.

```
C:\Users\kha\Documents\Visual Studio 2010\Projects\kha-VBC-Primzahlensieb Eratosthenes\kha-VBC-Primzahlensieb Eratosthenes\bin\Debug\kha-VBC-Primzahlensieb Erat...

Anzahl Primzahlen bis zur Größe x exakt nach Primzahlensieb von ERATOSTHENES (3. Jahrh. v. Chr.)
und nach Näherungsformel von LEGENDRE (1798): x / [Ln(x) - 1]

Anzahl Primzahlen bis 10^1  = 10          exakt: 4         Näherung: 8         Primzahlenanteil: 40,00%  Rechenzeit = 0,0 s
Anzahl Primzahlen bis 10^2  = 100         exakt: 25        Näherung: 28        Primzahlenanteil: 25,00%  Rechenzeit = 0,0 s
Anzahl Primzahlen bis 10^3  = 1000        exakt: 168       Näherung: 169       Primzahlenanteil: 16,80%  Rechenzeit = 0,0 s
Anzahl Primzahlen bis 10^4  = 10000       exakt: 1229      Näherung: 1218      Primzahlenanteil: 12,29%  Rechenzeit = 0,0 s
Anzahl Primzahlen bis 10^5  = 100000      exakt: 9592      Näherung: 9512      Primzahlenanteil:  9,59%  Rechenzeit = 0,0 s
Anzahl Primzahlen bis 10^6  = 1000000     exakt: 78498     Näherung: 78030     Primzahlenanteil:  7,85%  Rechenzeit = 0,1 s
Anzahl Primzahlen bis 10^7  = 10000000    exakt: 664579    Näherung: 661459    Primzahlenanteil:  6,65%  Rechenzeit = 0,6 s
Anzahl Primzahlen bis 10^8  = 100000000   exakt: 5761455   Näherung: 5740304   Primzahlenanteil:  5,76%  Rechenzeit = 6,8 s
Anzahl Primzahlen bis 10^9  = 1000000000  exakt: 50847534  Näherung: 50701542  Primzahlenanteil:  5,08%  Rechenzeit = 73,8 s

Bessere Näherungen für die Anzahl der Primzahlen würde die Berechnung nach
GAUSS mit der Funktion Li(x) (Integrallogarithmus) liefern, noch bessere die
Berechnung mit der RIEMANN-Formel R(x). Beide Näherungen sind keine
geschlossenen Formeln und deshalb nur iterativ berechenbar, heute zweckmäßiger-
weise mit einem Computerprogramm. Fertig ... _
```

Abbildung 2: Zur Anzahl der Primzahlen

```
C:\Users\kha\Documents\Visual Studio 2010\Projects\kha-VBC-Anzahl Primzahlen bis zur Groesse ...

Die Anzahl aller Primzahlen bis zur Größe x.

Exakt   = Nach Primzahlensieb Eratastones
Riemann = Summe Integrallogarithmus
Gauß-1  = Alte Gauß-Formel:  = x / Ln(x)
Gauß-2  = Integrallogarithmus nach Gauß
Leg-1   = Legendre-Formel 1: = x / [Ln(x) - 1,08366]
Leg-2   = Legendre-Formel 2: = x / [Ln(x) - 1]

  n     x = 10^n        Exakt   Riemann Gauß-1  Gauß-2  Leg-1   Leg-2
-------------------------------------------------------------------------
  1     10              4       5       4       5       8       8
  2     100             25      25      22      28      28      28
  3     1000            168     169     145     177     172     169
  4     10000           1229    1227    1086    1244    1231    1218
  5     100000          9592    9587    8686    9629    9588    9512
  6     1000000         78498   78528   72382   78626   78543   78030
  7     10000000        664579  664667  620421  664917  665140  661459

Wie man sieht, reicht für den 'Hausgebrauch' die besonders einfache Legendre-
Formel 2 aus. Sie ist bei noch sehr viel größerem x besser als Legendre 1.

Fertig, Tastendruck ...
```

Abbildung 3: Anzahl der Primzahlen mit verschiedenen Formeln berechnet

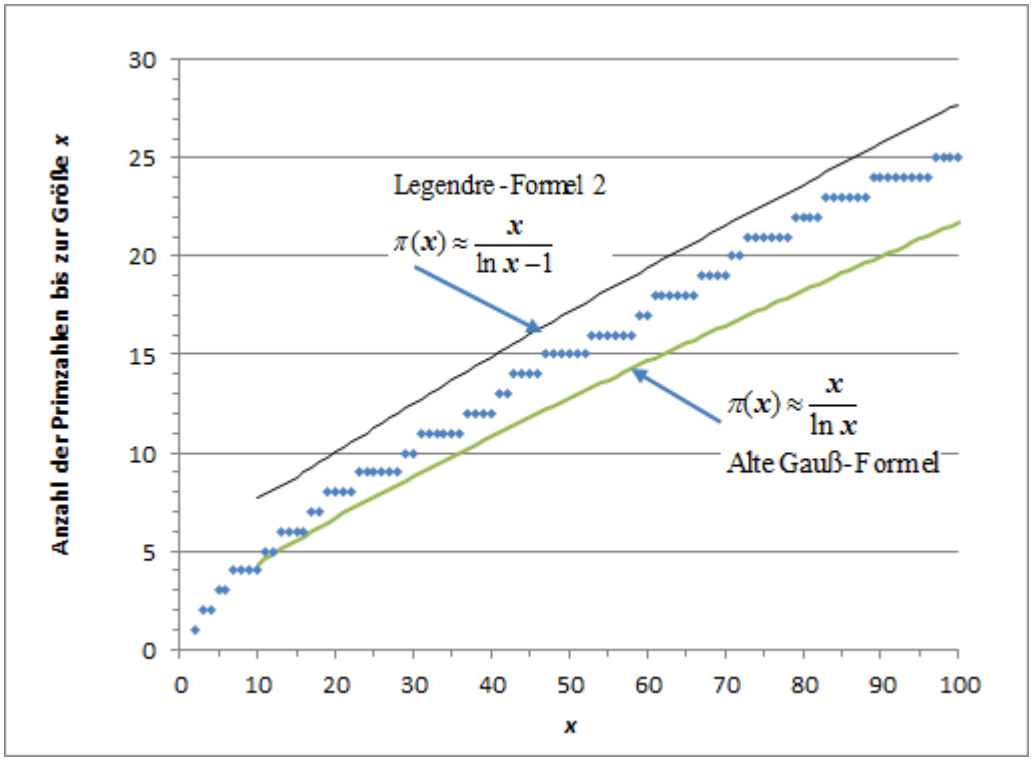


Abbildung 4: Vergleich zweier Formeln

Die Vermutung von Riemann

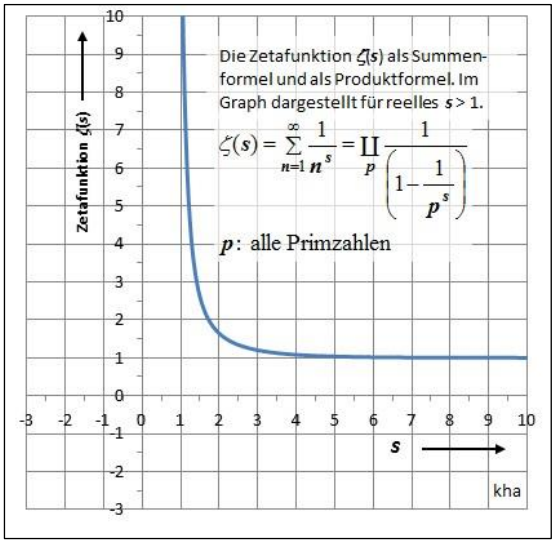


Abbildung 5: Die Zetafunktion für s > 1

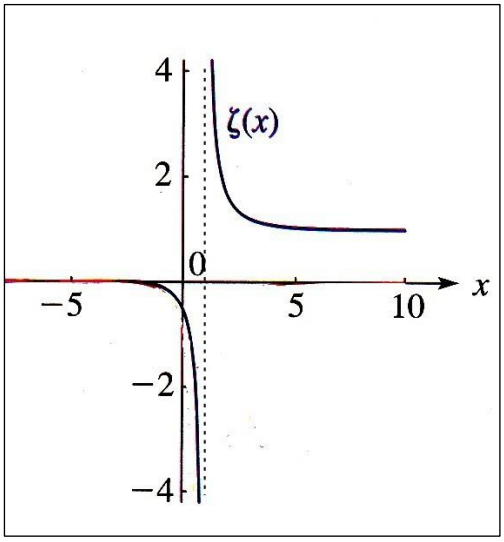


Abbildung 6: Die Zetafunktion für gesamten reellen Bereich

Die linke Abbildung zeigt die Zetafunktion[2] in der Darstellung von Gauss (Summenformel) bzw. Euler (Produktformel). Der Verlauf ähnelt der einer Hyperbel. Bei ***s*** = 1 liegt eine Polstelle vor. Riemann hat für seine Primzahluntersuchung die Zetafunktion analytisch auf den links der Polstelle liegenden Bereich komplex erweitert. Für die erweiterte Zetafunktion gibt es zahlreiche Darstellungen, als Summenformeln, als Produktformeln und als Integralformeln und auch als Kombinationen davon. Häufig treten in diesen Darstellungen auch andere Funktionen auf, wie z.B. die Gammafunktion $\Gamma(s)$ oder auch die Bernoullischen Zahlen. Häufig ist die Gültigkeit dieser erweiterten Zeta-Formeln an Voraussetzungen geknüpft, wie z. B. Realteil von *s* größer 0 oder größer 1. Darüber hinaus gibt es auch spezielle Formeln für ganzzahlige reelle Werte von *s* und noch viele Dinge mehr, siehe [kha-1]. Die (erweiterte) Zetafunktion ist eine der komplizierten mathematischen Funktionen.

In der rechten Abbildung (aus [kha-1] entnommen und überarbeitet), ist der Graph der erweiterten Zetafunktion $\zeta(s)$ für reellen positive und negative Werte von *s* bzw. *x* dargestellt. Im Fall von $x > 1$ zeigt sich der gleiche Verlauf wie links. Bei $x = 0$ beträgt der Funktionswert -0,5. Bei negativen Werten von x oszilliert die Zetafunktion mit zunächst kleinen Amplituden, die im gewählten Abbildungsmaßstab nicht sichtbar gemacht werden können. Bei weiter ansteigenden Negativwerten werden die Oszillationen sehr stark. Die Nullpunkte liegen bei -2, -4, -6 usw. also bei $-2n$, $n = 1, 2, 3$ usw. Diese Nullstellen werden *triviale Nullstellen* genannt und interessieren für die Riemannsche Vermutung nicht weiter.

Bei komplexen Argumenten liegen im "kritischen Streifen" (Realteil 0 ... 1) unendlich viele diskrete komplexe Nullstellen vor, die nach der Riemannschen Vermutung alle den Realteil von exakt 0,5 besitzen. 1903 wurden die ersten 15 Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion berechnet. Bis 1936 wurden 1041 Nullstellen berechnet; bis Oktober 2004 mit Computereinsatz 10 Billionen Nullstellen. In allen Fällen gab es keinen Widerspruch zur Riemannschen Vermutung, dennoch steht der *echte* Beweis noch aus. Ein Preisgeld von einer Million Dollar winkt, ausgelobt vom *Clay Mathematics Institute*, Cambridge, Massachusetts,

http://www.claymath.org/millennium/Riemann_Hypothesis/

Man erhofft sich von einem exakten Beweis wesentliche Erkenntnisse in der Zahlentheorie und auch Anwendungsmöglichkeiten wie z. B. in der Quantenmechanik. Angeblich sehen die Abstände zwischen den Nullstellen der Zetafunktion genauso aus wie die Abstände zwischen den Energieniveaus in quantenchaotischen Systemen. Was hat es damit auf sich? Es gab schon von anerkannten Mathematikern Beweise, die sich aber nach (schwieriger) Überprüfung als fehlerhaft herausstellten.

In der nächsten Abbildung sind mit den kleinen Pfeilen auf der Imaginärachse die ersten drei Nullstellen der Zetafunktion markiert.

Zur Goldbachschen Vermutung

[2] Bei der nummerischen Auswertung wurde in der Summenformel für Unendlich der Einfachheit halber der Ersatzwert 1.000.000 eingesetzt; damit kann die Zetafunktion bis auf 5 bis 6 Nachkommastellen genau berechnet werden.

Christian Goldbach**,** deutscher Mathematiker, 1690 – 1764: "*Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.*" Beispiele: 4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 5 + 3, 10 = 7 + 3, 12 = 7 + 5, ... wobei es auh mehrere Lösungen geben kann. Beispiele: 22 = 19 + 3 = 17 + 5.

Der britische Verlag Faber & Faber hat im Jahr 2000 ein Preisgeld von einer Million Dollar auf den Beweis der Vermutung ausgelobt. Da bis zur Frist April 2002 kein Beweis eingegangen ist, wurde die Auslobung eingestellt. Experten nehmen an, dass dieser Beweis – wenn überhaupt – noch schwieriger zu erbringen ist als der Beweis der Riemannschen Vermutung.

Zur Legendreschen Vermutung

Adrien-Marie Legendre, französischer Mathematiker, 1752 bis 1833: "*Zwischen den Quadraten vom zwei aufeinanderfolgenden Zahlen größer Null liegt* ***mindestens eine*** *Primzah*l."

Beispiel 1: zwischen $1^2 = 1$ und $2^2 = 4$ liegen die Primzahlen 2 und 3.

Beispiel 2: zwischen $2^2 = 4$ und $3^2 = 9$ liegen die Primzahlen 5 und 7.

Beispiel 3: zwischen $7^2 = 49$ und $8^2 = 64$ liegen die Primzahlen 53, 59 und 61.

Die Legendresche Vermutung ist ebenfalls noch unbewiesen.

Aus: http://web.viu.ca/pughg/RiemannZeta/RiemannZetaLong.html

The Functional Equation and Friends

The functional equation of the zeta function is

$$\zeta(s)=\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\,2\sin(\pi s/2)\zeta(1-s)$$

from which values of the zeta function at s can be computed from its values at $1-s$. Using this equation one sees immediately that the zeta function is zero at the negative even integers. Multiplying this equation through by $s(s-1)/2$ and applying standard factorial identities shows that

$$\xi(s)=\Gamma(s/2+1)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

is an entire function which has as zeros the non-trivial zeros of the zeta function, and is invariant under the transformation $s \to 1-s$. This invariance and the fact that the function is real for real s implies that it is also real on the critical line $s = 1/2 + it$, t real. On this line $s = 1/2 + it$,

$$\xi(1/2+it)=\left[e^{\Re\log(\Gamma(s/2))}\pi^{-1/4}(-t^2-1/4)/2\right]\times\left[e^{i\Im\log(\Gamma(s/2))}\pi^{-it/2}\zeta(1/2+it)\right]$$

The first term in this last equation is always negative. The second term, denoted $Z(t)$, is real and has the same zeros as the zeta function at $1/2 + it$, t real. Thus locating zeros on the critical line of the (complex) zeta function reduces to locating zeros on the real line of the real function $Z(t)$. The $Z(t)$ term in the previous equation may be expressed

Term 1 (nicht von Belang) | Term 2 = $Z(t)$. **Für Nullstellen Zetafunktion**

$$Z(t)=e^{i\vartheta(t)}\zeta(1/2+it)$$

where

$$\vartheta(t)=\Im\log(\Gamma(it/2+1/4))-t/2\log(\pi)$$

For computational purposes, the expansion

$$\vartheta(t)=t/2(\log(t/(2\pi))-1)-\pi/8+1/(48t)+7/(5760t^3)+\cdots$$

+ 31/(80640*t^5) + ...

is used. This function converges very rapidly for t at all large.

The function $Z(t)$ is typically the object of study for locating zeros of the zeta function on the critical line and verifying the Riemann Hypothesis.

kha: Aus: $r\,e^{i\varphi} \equiv r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ folgt für hier : $e^{i\vartheta(t)} = \cos\vartheta(t) + i\sin\vartheta(t)$

Aus: http://mathworld.wolfram.com/Riemann-SiegelFunctions.html

For a real positive t, the Riemann-Siegel Z function is defined by

$$Z(t) \equiv e^{i\vartheta(t)}\,\zeta\left(\tfrac{1}{2}+i\,t\right).$$

This function is sometimes also called the Hardy function or Hardy Z-function (Karatsuba and Voronin 1992, Borwein *et al.* 1999). The top plot superposes $Z(t)$ (thick line) on $\left|\zeta\left(\tfrac{1}{2}+i\,t\right)\right|$, where $\zeta(z)$ is the Riemann zeta function.

The series expansion of $\vartheta(t)$ about 0 is given by

$$\begin{aligned}\vartheta(t) &= -\tfrac{1}{2} t \ln \pi + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(4k+2)!!} \psi_{2k}\left(\tfrac{1}{4}\right) t^{2k+1} \\ &= \tfrac{1}{2}\left[-\ln \pi + \psi\left(\tfrac{1}{4}\right)\right] t - \tfrac{1}{48} \psi_2\left(\tfrac{1}{4}\right) t^3 + \tfrac{1}{3840} \psi_4\left(\tfrac{1}{4}\right) t^5 - \tfrac{1}{645\,120} \psi_6\left(\tfrac{1}{4}\right) t^7 \\ &= -\tfrac{1}{4}\left[2\gamma + \pi + 2\ln(8\pi)\right] t + \tfrac{1}{24}\left[\pi^3 + 28\zeta(3)\right] t^3 - \left[\frac{\pi^5}{96} + \frac{31\zeta(5)}{10}\right] + \ldots\end{aligned}$$

(Sloane's A067626), and about ∞ by

$$\vartheta(t) = -\frac{t}{2} \ln\left(\frac{2\pi}{t}\right) - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48t} + \frac{7}{5760t^3} + \frac{31}{80\,640t^5} + \ldots$$

(Sloane's A036282 and A114721; Edwards 2001, p. 120).

These functions are implemented in *Mathematica* as `RiemannSiegelZ`[z] and `RiemannSiegelTheta`[z].

Aus: http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

The Riemann zeta function satisfies the reflection functional equation

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\tfrac{1}{2} s\pi\right) \Gamma(s) \zeta(s) \tag{13}$$

(Hardy 1999, p. 14; Krantz 1999, p. 160), a similar form of which was conjectured by Euler for real s (Euler, read in 1749, published in 1768; Ayoub 1974; Havil 2003, p. 193). A symmetrical form of this functional equation is given by

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \pi^{-s/2} \zeta(s) = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \pi^{-(1-s)/2} \zeta(1-s) \tag{14}$$

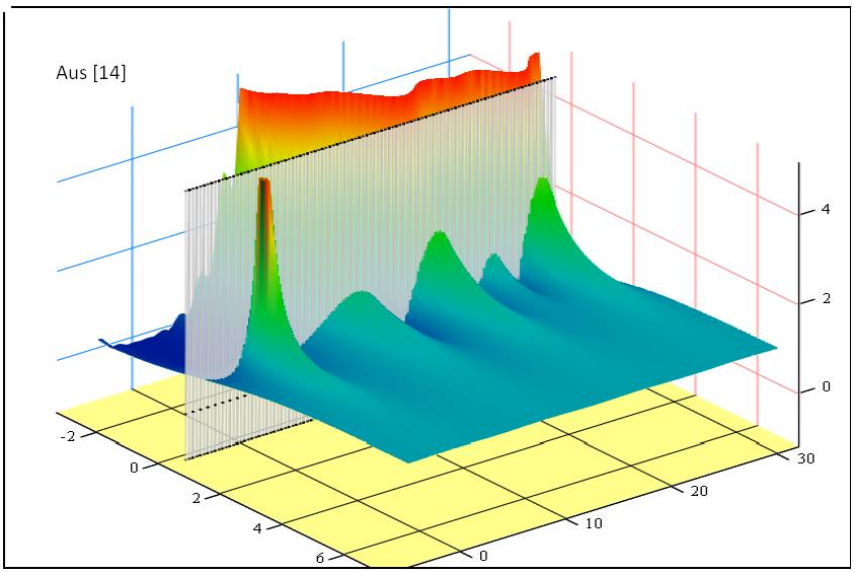
(Ayoub 1974), which was proved by Riemann for all complex s (Riemann 1859).

Aus beiden vorstehenden Internetquellen die **Funktionalgleichungen** für die Zetafunktion in angepasster Schreibform:

$$\zeta(s) = (2\pi)^{s-1} \cdot 2\sin(\pi s/2) \cdot \Gamma(1-s) \cdot \zeta(s-1) \tag{5}$$

oder gleichwertig:

$$\zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos(\pi s/2) \cdot \Gamma(s) \cdot \zeta(s) \tag{6}$$



Zur physikalischen Bedeutung der Nullstellenwerte der Riemannschen Zetafunktion

Aus [10], dort bei "Grenzen der Berechenbarkeit", Kap. 5.2 "Die Riemannsche Vermutung "

"Einige Mathematiker glauben, dass ein Beweis in nicht allzu ferner Zukunft möglich sein könnte. So wurden Analogien zwischen den nichttrivialen Nullstellen und quantenmechanischen chaotischen Systemen entdeckt: Der Mathematiker Hugh Montgomery und der Physiker Freeman Dyson machten im Jahr 1972 die Beobachtung, dass die Abstände zwischen den Nullstellen der Zetafunktion genauso aussehen wie die Abstände zwischen den Energieniveaus in quantenchaotischen Systemen. Die Nullstellen scheinen sich gleichsam abzustoßen, haben also statistisch die Tendenz, nicht zu nahe beieinander zu liegen. Mathematisch präziser ausgedrückt: Die nichttrivialen Nullstellen der Zetafunktion scheinen dieselben statistischen Eigenschaften aufzuweisen wir die Eigenwerte von hermiteschen Zufallsmatrizen. Ob sich diese Analogie für einen Beweis nutzen lässt, ist allerdings noch unklar. Fände sich jedoch beispielsweise eine quantenchaotische Anordnung, deren Energieniveaus exakt mit den Nullstellen der Zetafunktion übereinstimmen, wäre die Riemannsche Vermutung bewiesen."
kha-Anmerkung: Für den Millennium-Preis wird ein mathematischer Beweis verlangt.

Quellenverzeichnis

a) aus dem Internet, nur eine mehr oder weniger willkürliche Auswahl

[1] http://homerreid.ath.cx/research/talks/ZetaFunction.20080117.pdf Homer Reid. Die PDF-Datei mit 58 Tafeln, 495 MB.

[2] http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

[3] gute Einführung

[3] http://de.wikipedia.org/wiki/**Riemannsche**_%CE%B6-**Funktion** Der Code "%CE%B6" steht für das griechische **Zeta**-Zeichen ζ.

[4] http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Vermutung Fundierte Darstellung

[5] http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahlsatz

[6] http://www.matha.rwth-aachen.de/de/lehre/ws07/sft/v12mh.pdf Michael Hosckek, "Die Riemannsche Zetafunktion", 18 S.

[7] http://www.youtube.com/watch?v=XQ8kuzz1Nzo Video

[8] http://mathworld.wolfram.com/RiemannZetaFunction.html

[9] http://www.michael-holzapfel.de/themen/primzahlen/pz-anzahl.htm

[10] http://www.joergresag.privat.t-online.de. Dort bei "Grenzen der Berechenbarkeit", Kap. 5.2 "Die Riemannsche Vermutung

[11] http://de.wikipedia.org/wiki/Mersenne-Primzahl

[12] http://de.wikipedia.org/wiki/Elliptic_Curve_Cryptography Eine Alternative zur RSA-Verschlüsselung

[13] http://www.a-sit.at/pdfs/2001%20ElliptischeKurven_und_Signatur_Studie.pdf Im Anhang ab Seite 23 "Technische Details"

[14] http://user.hs-nb.de/biw/grobstich/Vortrag-Ausarbeitung3.pdf

[15] http://www.emis.de/classics/Riemann/Zeta.pdf Die Riemann-Publikation als Faksimile

[16] http://www.primzahlen.de/referenten/Werner_D_Sand/eine_neue_methode_2_auflage.pdf

[17] http://de.wikipedia.org/wiki/Primzahltest Darin auch moderne Verfahren wie Atkin-Sieb und andere

[18] http://de.wikipedia.org/wiki/Lucas-Lehmer-Test Überprüfung von Mersenne-Zahlen

[19] http://www.mb-schiekel.de/zetafunc.pdf Zetafunktionen in der Physik, 384 Seiten

[20] http://fsmat.at/~ggutenbr/Arbeiten/Diplom/node27.html Riemann-Siegel-Formel (Siegel, 1932, aus Riemann Nachlass)

[21] http://web.viu.ca/pughg/thesis.d/masters.thesis.pdf Masters-Thesis über Riemann-Siegel-Formel mit C-Programmen

[22] http://de.wikibooks.org/wiki/Primzahlen:_Tabelle_der_Primzahlen_%282_-_100.000%29 %28 = "(", %29 = ")"

[23] http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Ueber_die_Anzahl_der_Primzahlen_unter_einer_gegebenen_Gr%C3%B6sse.pdf
Original-Arbeit von Riemann als Faksimile-PDF. Monatsberichte der Berliner Akademie, November 1859, Seiten 136 bis 144. "%C3%B6" = "ö"

[24] http://www.claymath.org/millennium/ Die Auslobung des Preisgeldes des amerikanischen Clay-Instituts

[25] http://www.imd.uni-rostock.de/veroeff/marsym2001_schmalisch.pdf Zu Elliptic Curve Cryptography

[26] http://www.quantenwelt.de/technik/GPS/relativitaet.html Relativität in der Satellitennavigation

[27] http://www.dtc.umn.edu/~odlyzko/zeta_tables/ Andrew Odlyzko: Hochgenaue Berechnung der Zetafunktion-Nullstellen

[28] http://www.zetagrid.net/ ZetaGrid-Organisation

[29] http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/zetaevaluations.html#CITEOdlyzkoSchonhage88

[30] http://mb.schiekel.de/zetafunc.pdf Bernhard Schiekel: Zeta-Funktion in der Physik – eine Einführung

[31] http://www.zetagrid.net A. M.Odlyzko, The 10^{22}-nd zero of the Riemann zeta function, in M. van Frankenhuysen, M. L. Lapidus (Eds.): Dynamical, Spectral, and Arithmetic Zeta Functions, American Mathematical Society, Contemporary Mathematics, volume 290 (2001), 139-144.

[32] http://www.zetagrid.net A. M. Odlyzko, A. Schönhage, Fast Algorithms for Multiple Evaluations of the Riemann Zeta Function, Transactions of the American Mathematical Society 309 (1988), 797-809.

b) aus der kha-Handbibliothek:

[kha-1] N.N., *NIST Handbook of Mathematical Functions.* National Institute of Standards and Technology, Cambridge University Press, New York, 2010. Kapitel 25: *Zeta and Related Functions*, Seite 601 bis 616.

[kha-2] Jahnke, Emde, *Tafeln höherer Funktionen*, Leipzig 1943, Nachdruck 1960. Kap. IX: *Die Riemannsche Zetafunktion*, Seite 265 bis 270.

[kha-3] Bernhard Riemann, *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass*, Springer (+ Teubner), Berlin 1990, 911 Seiten. ISBN 3-322.00376-0. Bei kha liegt nur der Artikel "*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groesse*" vor, Faksimile der Originalseiten 145 bis 163 aus den Monatsberichten der Berliner Akademie, November 1859, Druckseiten mit Anmerkungen von 177 bis 187. PDF-Datei "Riemann – Über die Primzahlen.pdf". Das vollständige Werk ist in der Bibliothek des Deutschen Museums verfügbar, Signatur "*1000/SA 5459 (Suppl. 1"*. Bei Amazon findet man aber auch eine ähnliche Ausgabe

[kha-4] Marcus du Sautoy, *Die Musik der Primzahlen*, DTV-Wissen, 2011.
Eine frühere Ausgabe gibt es auch bei C. H. Beck.

[kha-5] H. M. Edwards, *Riemann's Zeta Function*, Dover Publications, Mineola, New York, 1974 / 2001

Der zur Diskussion stehende Artikel "*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groesse*" befindet sich auf den Druckseiten 177 bis 187. Die Originalpublikation erschien in den Monatsberichten der Berliner Akademie im November 1859.

Riemann benutzt für diese Untersuchung die schon von Euler bekannte Beziehung $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{alle } p} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$,

wobei mit Π das Produkt über alle Primzahlen p bezeichnet wird.

Riemann bezeichnet diese Funktion mit Zeta, kleines griechisches Zeichen ζ. Somit:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{\text{alle } p} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}$$

Riemann untersucht diese Funktion für seine Primzahlzwecke mit komplexen Argument s und stellt fest, dass sie unendlich viele negative reelle Nullstellen hat, bei -2, -4, -6, -8 usw. Diese werden mit "triviale Nullstellen" bezeichnet und interessieren nicht weiter. Die Zetafunktion besitzt aber auch unendlich viele komplexe Nullstellen. Überraschend stellt Riemann fest, dass sie alle den Realteil 0,5 besitzen und vermutet, dass dieses generell gilt ---> Riemannsche Vermutung. Riemann-Zitat: *"... Hiervon wäre allerdings ein strenger Verweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen Versuchen vorläufig beiseite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien*.". Und so ist die Riemannsche Vermutung seit November 1859 ein ungelöstes mathematisches Problem, nach Expertenmeinung heute eines der wichtigsten (Millennium-Problem, "Wer).

Andere bedeutende mathematische Vermutungen:

1. **Die Goldbachsche Vermutung.** Aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Goldbachsche_Vermutung

Christian Goldbach, 1690 bis 1742. In einem Brief an Euler formulierte Goldbach 1742 seine Vermutung.

Die starke (oder binäre) Goldbachsche Vermutung lautet wie folgt:

Jede gerade Zahl größer als 2 kann als Summe zweier Primzahlen geschrieben werden.

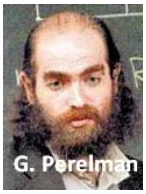
Mit dieser Vermutung befassten sich bis in die heutige Zeit viele Zahlentheoretiker, ohne sie beweisen oder widerlegen zu können.

Tomás Oliveira e Silva zeigte mittels eines Verteiltes-Rechnen-Projekts mittlerweile (Stand November 2011) die Gültigkeit der Vermutung für alle Zahlen bis 26×10^{17}. Ein Beweis dafür, dass sie für *jede* beliebig große gerade Zahl gilt, ist dies natürlich nicht.

Nachdem der britische Verlag Faber & Faber im Jahr 2000 ein **Preisgeld von einer Million Dollar** auf den Beweis der Vermutung ausgelobt hatte, wuchs auch das öffentliche Interesse an dieser Frage. Das Preisgeld wurde nicht ausgezahlt, da bis April 2002 kein Beweis eingegangen war.

2. **Die Poincaré-Vermutung.** Aus: http://de.wikipedia.org/wiki/Poincar%C3%A9-Vermutung. Henri Poincaré, 1854 bis 1912, Frankreich.

Die **Poincaré -Vermutung** besagt, dass, so lange ein geometrisches Objekt kein Loch hat, es zu einer **Kugel** deformiert (also geschrumpft, gestaucht, aufgeblasen o. ä.) werden kann – und zwar nicht nur im Fall einer zweidimensionalen Oberfläche im dreidimensionalen Raum, sondern auch in höheren Dimensionen. Besonders im Falle der dreidimensionalen Oberfläche im vierdimensionalen Raum könnte das neue Erkenntnisse über die Geometrie des Universums ermöglichen. Einstein würde sich freuen.



Die *Poincaré-Vermutung* galt lange als eines der bedeutendsten ungelösten Probleme in der Topologie, einem Teilgebiet der Mathematik. Henri Poincaré hatte sie 1904 aufgestellt. Im Jahr 2000 zählte das Clay Mathematics Institute die Poincaré-Vermutung zu den sieben bedeutendsten ungelösten mathematischen Problemen, den **Millennium-Problemen**, und lobte für ihre Lösung **eine Million US-Dollar** aus. **Grigori Perelman**, geb. 1966, Leningrad**,** hat die Vermutung bewiesen. 2006 sollte er die Fields-Medaille (verbunden mit dem "mathematischen Nobelpreis" in Höhe von 15.000 Kanadischen Dollar) für seinen Beweis erhalten, die er jedoch ablehnte. Am 18. März 2010 wurde ihm des Weiteren der Millennium-Preis des Clay-Instituts zugesprochen, den er ebenfalls ablehnte. Perleman hat acht Jahre

an dem Beweis gearbeitet. Der Beweis belegt 40 Seiten, die Prüfung des Beweises dagegen 140 Seiten.

Nach Presseberichten wohnt Perelman nach Überwerfungen mit seiner Universität derzeit ohne Anstellung bei seiner Mutter in einer Zweizimmerwohnung bei St. Petersburg und will seine Ruhe haben.

Private kha-Anmerkung: Bekanntlich gibt es den Nobelpreis nicht für das Gebiet der Mathematik. Grund: Der Stifter, Alfred Nobel, hatte keine guten Schülererinnerungen an seine Mathe-Lehrer. Aber muss man deswegen gleich das Dynamit erfinden? ;-)

1984 hat der französisch-amerikanische Mathematiker Louis de Branges de Bourcia einen Beweis für die Riemannsche Vermutung vorgestellt, der sich aber zwischenzeitlich als falsch herausgestellt hat. Auch frühere Beweise von *Louis de Branges* über andere mathematische Vermutungen haben sich als falsch herausgestellt.

Aus:
Aus: http://www.zeit.de/2001/03/200103_riemann.xml

Näherung durch Carl Friedrich Gauß (1792): $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln(x)}$, für $x \to \infty$

Bessere Näherung durch C. F. Gauß (1849): $\pi(x) \sim \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln(t)}$, für $x \to \infty$

(Graph grün)

Eine noch bessere Näherung lieferte Bernhard Riemann (1859): $\pi(x) \approx R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{1/n})$

Möbiusfunktion: μ(n)

- μ(n) = 1 für n = 1
- μ(n) = 0, wenn in der Primfaktorzerlegung von n mindestens ein Primfaktor mehrfach vorkommt
- μ(n) = $(-1)^k$, wenn die Primfaktorzerlegung von n aus k verschiedenen Primfaktoren besteht

Riemannsche Zetafunktion: $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

1.1 Näherung durch Gauß (1792): $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}$ 15 - jähriger Gauß

1.2 Näherung durch Gauß (1849): $\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\ln t} dt$ Integral-Logarithmus

2.1 Näherung von Legendre $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - c}$, $c = 1{,}08366$

2.2 Näherung von Legendre $\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x - 1}$

3. Nach Riemann (1859) $\pi(x) \approx \mathrm{R}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n} \mathrm{Li}(x^{1/n})$ Li ist der Integrallogarithmus, siehe oben

Die Funktion $\mu(n)$, die später Möbius-Funktion benannt, liefert die Zahlenwerte 1, 0 und -1 nach der Festlegung von Riemann wie folgt:

- $\mu(n) = 1$ für $n = 1$
- $\mu(n) = 0$ wenn in der Primzahlzerlegung von n mindestens eine Primzahl mehrfach vorkommt.
- $\mu(n) = (-1)^k$ wenn die Primzahlenzerlegung von n aus k verschiedenen Primzahlen besteht.

Damit kann man die Riemann-Formel $\mathrm{R}(x)$ wie folgt angeben:

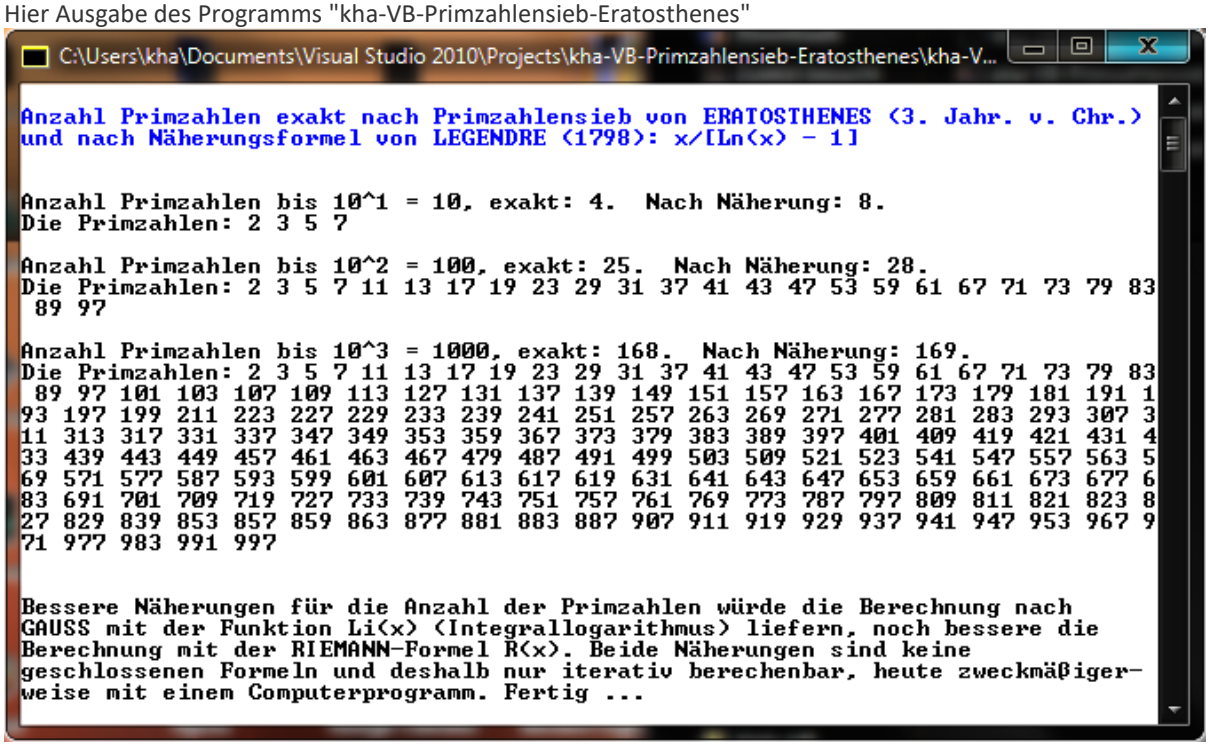
$$\mathrm{R}(x) = \mathrm{Li}(x) - \frac{1}{2}\mathrm{Li}(x^{1/2}) - \frac{1}{3}\mathrm{Li}(x^{1/3}) - \frac{1}{5}\mathrm{Li}(x^{1/5}) + \frac{1}{6}\mathrm{Li}(x^{1/6}) - \frac{1}{7}\mathrm{Li}(x^{1/7}) - + \ldots$$

Mit der Riemannschen Zetafunktion $\zeta(x)$ lässt sich die Riemann-Formel $\mathrm{R}(x)$ auch wie folgt darstellen:

$$\mathrm{R}(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n\, n!\, \zeta(n+1)}$$

Die Formel 2.1 von Legendre hat wegen der empirischen Konstanten c = 1,08366 etwas Argwohn erregt, wenn auch die Ergebnisse besser waren als bei Gauß 1.1. Später haben andere das c für unterschiedliche Bereiche definiert, bis man sich auf c = 1 geeinigt hat, das auch für ganz große Werte bessere Ergebnisse liefert. So betrachtet ist 2.2 nur eine Kosmetisierung von 2.1. Für den Hausgebrauch empfiehlt sich 2.2 durchaus, da sie besser ist als die Gauß-Formel nach 1.1 und ebenso simpel zu berechnen ist. Bei Werten unter etwa 100 führen alle Näherungen zu ziemlich großen relativen Fehlern. Die Riemann-Berechnung schneidet auch in diesen Fällen am besten ab.

Hier Ausgabe des Programms "kha-VB-Primzahlensieb-Eratosthenes"



Anzahl der Primzahlen im Bereich bis zur Größe x - Vergleich der Näherungsmethoden

		Exakt	Riemann	Gauß	Gauß-Alt	Legendre 1	Legendre 2
n	$x = 10^n$	nach [9]	R(x) mit 7 Li(x)-Gliedern	Li(x)	x / Ln(x)	x / (Ln(x) - 1,08366)	x / (Ln(x) - 1)
1	10	4	5	5	4	8	8
2	100	25	25	28	22	28	28
3	1.000	168	169	177	145	172	169
4	10.000	1.229	1.227	1.244	1.086	1.231	1.218
5	100.000	9.592	9.587	9.629	8.686	9.588	9.512
6	1.000.000	78.498	78.528	78.626	72.382	78.543	78.030
7	10.000.000	664.579	664.667	664.917	620.421	665.140	661.459

Li(x) = Integrallogarithmus. Integral von 2 bis x von 1/Ln(x), nur iterativ zu bestimmen. Berechnung im Programm "kha-VB-Primzahlenvergleich.exe"

Zu den Mersenne-Primzahlen

Bis 1536 glaubte man, dass $2^p - 1$ eine Primzahl sei, wenn p eine Primzahl sei.

Marion Mersenne (französischer Theologe, Mathematiker und Musiktheoretiker, 1588 bis 1648) behauptet, $2^p - 1$ sei eine Primzahl für p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127 und 257, jedoch keine Primzahl für **alle anderen natürlichen Zahlen** kleiner als 257.

Der letzte Teil der Behauptung ist allerdings falsch für:

- ***p*** = 61 (1883 bemerkt),
- ***p*** = 89 (erst nach 1900 bemerkt)
- ***p*** = 207(erst nach 1900 bemerkt)

denn diese drei Mersenne-Zahlen sind alles Primzahlen.

Umgekehrt führt ***p***= 67 im Gegensatz zu Mersenne zu keiner Primzahl. Dazu aus [kha-4]: Im Jahre 1903 hielt Frank Nelson Cole, Mathematik-Professor an der Columbia University in New York bei einem Treffen amerikanischer Mathematiker einen sehr merkwürdigen "Vortrag". Er ging an die Tafel und schrieb:

$$2^{67} – 1 = 193.707.721 * 761.838.257.287$$

und beendete seinen "Vortrag". Die Zuhörer spendeten ihm eine Standing Ovation. Man wusste schon seit 1867, dass die 20-stellige Mersenne-Zahl (2^{67}- 1 ≈ 1,475...*10^{20}) keine Primzahl ist, konnte sie aber nicht faktorisieren, d. h. in Primzahlen zerlegen. Prof. Cole hatte er in wochenlanger Arbeit diese Mersenne-Zahl faktorisiert, d. h. in die beiden Primzahlen 193.707.721 und 761.838.257.287 zerlegt.

Die ersten Mersenne-Zahlen:
$2^2 – 1 = 3$, dual: 11
$2^3 – 1 = 7$, dual: 111
$2^4 – 1 = 15$, dual: 1111, aber keine Primzahl. Mersenne hat *p* = 4 für Primzahl-Eigenschaft ausgeschlossen
$2^5 – 1 = 31$, dual: 11111
$2^6 – 1 = 63$, dual: 111111, aber keine Primzahl. Mersenne hat *p* = 6 für Primzahl-Eigenschaft ausgeschlossen.
$2^7 – 1 = 127$, dual: 1111111
Wie man sieht, bestehen die Mersenne-Zahlen in der dualen Darstellung nur aus Einsen.

Die größten Mersenne-Primzahlen werden in einer Liste geführt. Leonhard Euler ist in dieser Liste auf Platz 8 vertreten mit ***p*** = 31 bzw. der Primzahl $2^{31} – 1 = 2.147.483.647$.

Die Liste immer weiter geführt. Im Jahre 2009 wird bei einem GIMPS[3]-Projekt der 47. Platz[4] () besetzt mit ***p*** = 43.112.609. Die zugehörige Primzahl hat 12.978.189 Stellen! Man vermutet, dass es unendlich viele Mersenne-Primzahlen gibt.

Zum Krypto-System RSA

Krypto-Systeme werden nicht nur im geheimdienstlichen Bereich eingesetzt, sie sind vielmehr im Internet für den Datenaustausch und insbesondere für den Zahlungsverkehr unverzichtbar geworden.

Nach http://de.wikipedia.org/wiki/RSA-Kryptosystem

RSA ist ein asymmetrisches Krypto-Verfahren zur Verschlüsselung und für digitale Signatur basierend auf Primzahlen und Modulo-Rechnungen. 1997 am Massachusetts Institute of Technology (MIT) entwickelt von Ronald **R**ivest, Alan **S**herman und Leonard **A**dleman. Das Patent ist 2000 abgelaufen.

Es gibt bei RSA einen öffentlichen Teil des Schlüssels (public key), bestehend aus dem Zahlenpaar (*e, N*) und einen geheimen Schlüssel (private key), bestehend aus dem Zahlenpaar (*d, N*). Das gemeinsame *N* ist eine große Zahl, als Produkt der beiden Primzahlen *p* und *q*. Die wählt man entsprechend der gewünschten Schlüssellänge, z. B. für 512 Bit. Das Zerlegen von *N* in die Primzahlen *p* und *q* würde bei systematischen Probieren mit den schnellsten Rechnern viele Jahre dauern da bei 512 Bit ca. 3,7887*10^{151} Primzahlen vorliegen, eine Zahl mit 151 Stellen. Zur Orientierung: Die Anzahl aller Atome im gesamten Universum (ohne dunkle Materie) wird auf 10^{77} geschätzt, eine Zahl mit 77 Stellen. Weitere Details siehe Wikipedia

---

[3] GIMPS: Great Internet Mersenne Prime Search. Gemeinnützige Organisation, 1996 gegründet, um neue Weltrekord-Mersenne-Primzahlen zu entdecken, durch Zusammenschalten von vielen kleinen Computern. Bei www.mersenne.org kann man nachlesen, dass die Überprüfung der 46. und 47. Mersenne-Primzahl auf einer SUN-Workstation mehrere Tage gedauert hat. Für Überprüfung von Mersenne-Primzahlen wurden spezielle Algorithmen entwickelt, siehe [18], Lucas-Lehmer-Test. Dieser Test arbeitet mit Modulo-Rechnungen und nutzt den Umstand aus, dass Mersenne-Zahlen in der dualen Darstellung nur aus Einsen bestehen. Man kann davon ausgehen, dass auch künftig die größte (überprüfte) Primzahl eine Mersenne-Primzahl sein wird.

[4] Die die Nummerierung ist etwas vage, da auch kleinere Mersenne-Primzahlen entdeckt werden und in die Liste nach der Größe einsortiert werden. Siehe [18].

Schlüssellänge und Anzahl Primzahlen 07.09.2012, kha

Schlüssel-länge in Bit	Zahlenbereich 2^{Bit}	Anzahl Primzahlen nach Näherungsformel: ≈ x / [Ln(x) - 1]		
8	256	56		Genau: 54
16	65536	6495		Genau: 6.549
32	4.294.967.296	202.777.307		
64	1,84467E+19	4,25418E+17	≈	425.418.361.821.750.000
128	3,40282E+38	3,87906E+36		
256	1,15792E+77	6,56248E+74		
512	1,34078E+154	**3,7887E+151**		
768	1,55252E+231	2,9219E+228		
1022	4,49423E+307	6,3532E+304		
1023	8,98847E+307	1,2694E+305		
1024	1,79769E+308	2,5363E+305		

In diesem Bereich drei Zehnerpotenzen Unterschied, d. h. nur ca. 1 Promille der Zahlen sind Primzahlen.

Hinweis: Bei Schlüssellänge 1024 Bit reicht der darstellbare Wertebereich von Excel nicht mehr aus! Der Zahlenbereich wurde in diesem Fall durch Verdoppelung des Wertes in der Vorgängerzeile händisch berechnet, da 1 Bit mehr. Die Anzahl Primzahlen wurde in diesem Fall extern berechnet.

Zum Krypto-System ECC

Die *RSA-Krypto-Systeme* haben ab Mitte der 1980er Jahre durch die *Elliptic-Curve-Crypotography* (ECC) Konkurrenz bekommen, siehe [12]. Danach kommt ECC mit kürzeren Schlüsseln aus und ist schneller und sicherer. Ein ECC-Schlüssel mit 160 Bit soll die gleiche Sicherheit bringen wie ein RSA-Schlüssel mit 1024 Bit. Ein ECC-Schlüssel mit 384 Bit entspräche in der Sicherheit einem RSA-Schlüssel mit 7680 Bit.

Verwandte Begriffe sind ECDH, ECIES, IES, ECDSA und ECMQV.

Elliptischen Kurven (nicht zu verwechseln mit Ellipse) werden angesetzt für:

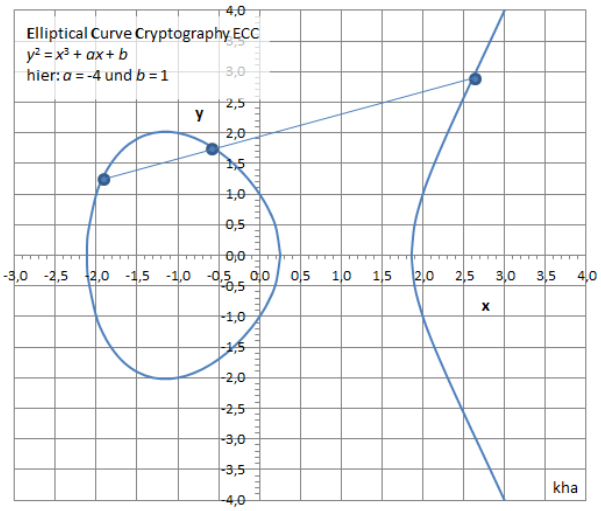
- Reellen Zahlenraum. Die Kurven haben hier die Struktur: $y^2 = x^3 + ax + b$.
  Dazu die Bedingung: $4a^3 + 27b^2 <> 0$.
- Komplexen Zahlenraum
- Rationale Zahlen
- Endliche Körper. Anwendung bei der *Elliptic-Curve-Cryptography*.

Weiter aus [12]:

ECC wird von modernen Windows-Betriebssystemen (ab Vista) unterstützt.
Produkte der Mozilla Foundation (u.a. Firefox, Thunderbird) unterstützen ECC mit min. 256 Bit Key-Länge (P-256 aufwärts).
Die in Österreich gängigen Bürgerkarten (e-card, Bankomat- oder a-sign Premium Karte) verwenden ECC seit ihrer Einführung 2004/2005, womit Österreich zu den Vorreitern in deren breitem Einsatz zählt.
Die Reisepässe der meisten Europäischen Staaten (u. a. Deutschland) verwenden ECC zumindest für den Schutz des Zugriffs auf den Chip mittels Extended Access Control, einige Länder (u. a. Deutschland und Schweiz) verwenden es auch, um die auf dem Chip gespeicherten Daten mit Passive Authentication zu schützen.
In Deutschland verwendet der neue Personalausweis ebenfalls ECC, sowohl für Extended Access Control als auch für Passive Authentication.

Aus http://de.wikipedia.org/wiki/Elliptic_Curve_Cryptography: Sony benutzt ECC zur digitalen Signierung von Software für die PlayStation 3. Im Jahr 2010 gelang einer Hackergruppe die Ermittlung des benutzten *Private Key* und somit ein fast vollständiger Bruch der Sicherheitssysteme. Dies war jedoch vor allem auf Implementationsfehler von Sony zurückzuführen und nutzte keine Sicherheitslücken in ECC-Verfahren aus.

Dem Verfasser ist die ECC ziemlich fremd und deshalb begnügt er sich mit der Darstellung einer elliptischen Kurve, die zumindest zeigt, dass die elliptischen Kurven keine Ellipsen sind. Die Darstellung gilt in Anlehnung an [13] für die Formel $y^2 = x^3 + ax + b$ mit $a = -4$ und $b = 1$. Kompliziertere Figuren erhält man mit $y^2 + xy = x^3 + ax^2 + b$. Die aus [13] entnommene nebenstehende Abbildung zeigt in dramatisierender Weise den Vorteil von ECC gegenüber RSA in Bezug auf die Mindestsecuritiy-Level, aus gedrückt in MIPS-Jahren. MIPS = Million Instructions Per Second. Nach der Abbildung wäre ein ECC mit 160 Bit mit einem Rechner mit 1 MIPS in 10^{12} Jahren zu knacken, ein RSA bräuchte für den gleichen Sicherheitslevel schon einen Schlüssel mit 1024 Bit. Stand 2001.



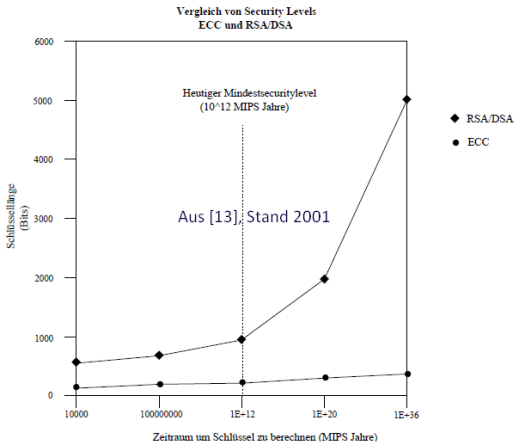
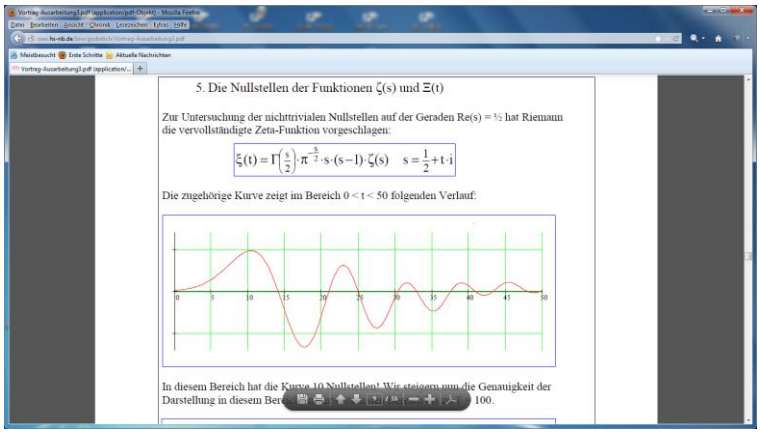


Abbildung A.2: Vergleich der Security Levels

---------- FUNDUS ----------



5. Die Nullstellen der Funktionen $\zeta(s)$ und $\Xi(t)$

Zur Untersuchung der nichttrivialen Nullstellen auf der Geraden Re(s) = ½ hat Riemann die vervollständigte Zeta-Funktion vorgeschlagen:

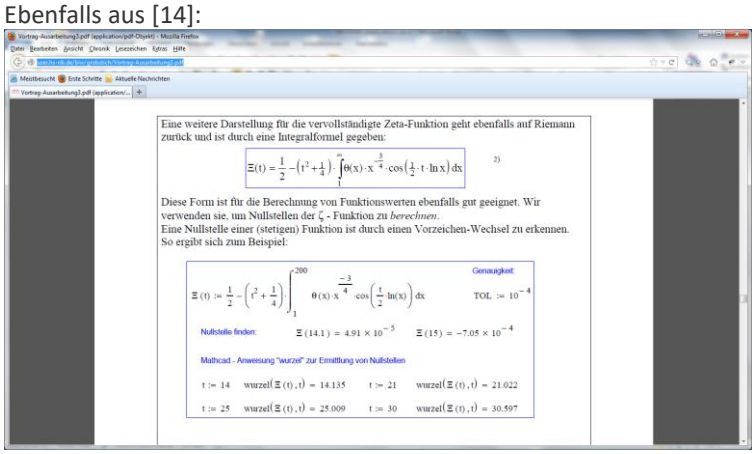
$$\xi(t) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\pi^{-\frac{s}{2}}\cdot s\cdot(s-1)\cdot\zeta(s) \qquad s = \frac{1}{2}+t\cdot i$$

Die zugehörige Kurve zeigt im Bereich 0 < t < 50 folgenden Verlauf:

In diesem Bereich hat die Kurve 10 Nullstellen! Wir steigern nun die Genauigkeit der Darstellung in diesem Bere 100.

Die vervollständigte Zetafunktion nennt Riemann Xi-Funktion $\xi(s)$. Sie hat die gleichen Nullstellen wie die Zetafunktion $\zeta(s)$, ist aber immer reell, so dass die Nullstellensuche einfacher wird. Aber es muss auch die Gamma-Funktion $\Gamma(s/2)$ berechnet werden, zusätzlich zur Zetafunktion $\zeta(s)$.

Ebenfalls aus [14]:



Eine weitere Darstellung für die vervollständigte Zeta-Funktion geht ebenfalls auf Riemann zurück und ist durch eine Integralformel gegeben:

$$\Xi(t) = \frac{1}{2}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\cdot\int_1^{\infty}\theta(x)\cdot x^{\frac{-3}{4}}\cdot\cos\left(\frac{1}{2}\cdot t\cdot\ln x\right)dx \qquad ^{2)}$$

Diese Form ist für die Berechnung von Funktionswerten ebenfalls gut geeignet. Wir verwenden sie, um Nullstellen der ζ - Funktion zu *berechnen*.
Eine Nullstelle einer (stetigen) Funktion ist durch einen Vorzeichen-Wechsel zu erkennen.
So ergibt sich zum Beispiel:

Genauigkeit: $TOL := 10^{-4}$

$$\Xi(t) := \frac{1}{2}\cdot\left(t^2+\frac{1}{4}\right)\cdot\int_1^{200}\theta(x)\cdot x^{\frac{-3}{4}}\cdot\cos\left(\frac{t}{2}\cdot\ln(x)\right)dx$$

Nullstelle finden: $\Xi(14.1) = 4.91\times10^{-5}$ $\quad\Xi(15) = -7.05\times10^{-4}$

Mathcad - Anweisung "wurzel" zur Ermittlung von Nullstellen

$t := 14$ $\quad$ wurzel$(\Xi(t),t) = 14.135$ $\quad t := 21$ $\quad$ wurzel$(\Xi(t),t) = 21.022$

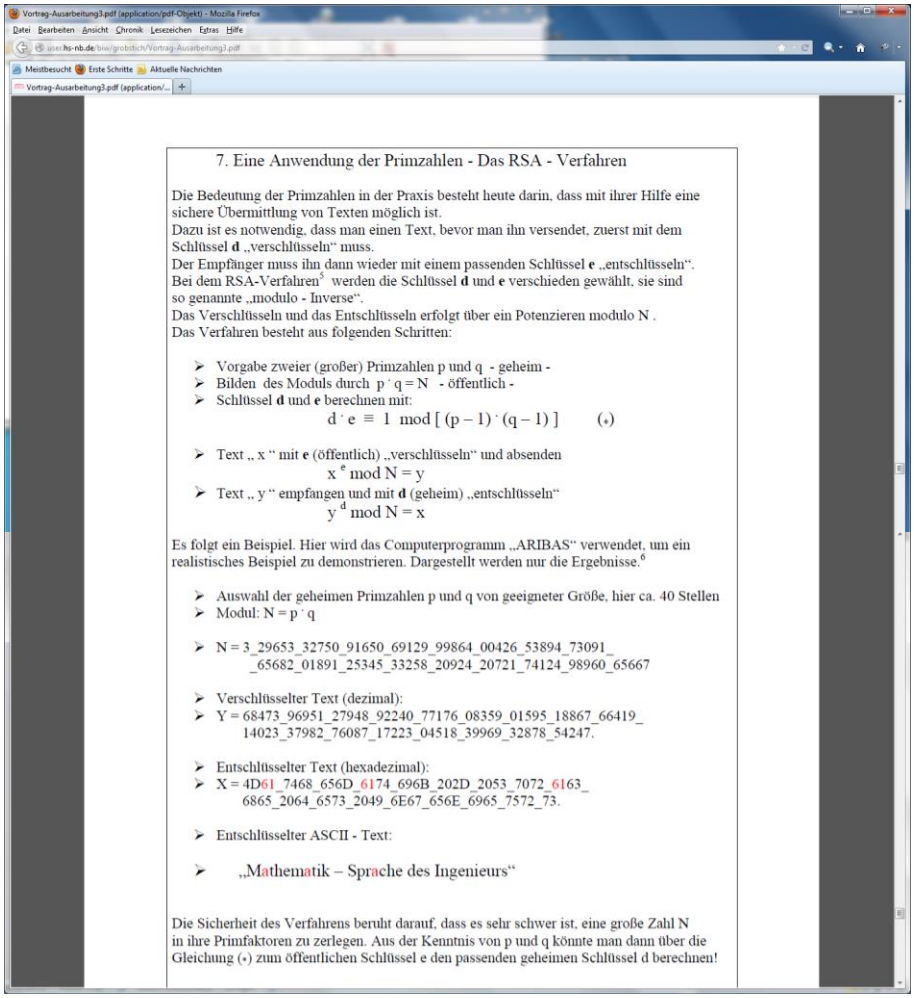
$t := 25$ $\quad$ wurzel$(\Xi(t),t) = 25.009$ $\quad t := 30$ $\quad$ wurzel$(\Xi(t),t) = 30.597$

2 Die Funktion θ (x) bezeichnet die Jacobi-Theta – Funktion, Autor von [14].

Diese Erweiterung nennt der Autor Riemann XI-Funktion $\Xi(t)$, im Riemann-Original Xi-Funktion $\xi(t)$ Sie benutzt die Jacobische Theta-Funktion $\theta(x)$, oft auch so $\vartheta(x)$ geschrieben, bei Riemann-Original Psi-Funktion $\psi(x)$.
Aktueller Hinweis: Obige Formel findet sich im Riemann-Original auf Seite 179 wie folgt:

$$\xi(t) = \frac{1}{2} - \left(t^2 + \frac{1}{4}\right) \cdot \int_1^\infty \psi(x)\, x^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{1}{2} t \log x\right) dx \quad \text{mit:} \quad \psi(x) = \sum_1^\infty e^{-n^2 \pi x}$$

Riemann benutzt im Original *tt* für t^2und *nn* für n^2. Die Funktion $\xi(t)$ gilt für a= 0,5 und besitzt die gleichen Nullstellen wie die Zetafunktion $\zeta(½, t)$, ist aber im Gegensatz zu ihr reell und kann wegen der Nulldurchgänge leichter iterativ berechnet werden. Bei der Zetafunktion muss man dagegen die gemeinsamen Nulldurchgänge von Realteil und Imaginärteil iterativ suchen. Betrachtet man nur den Absolutwert der Zetafunktion, dann hat man keine Nulldurchgänge, sondern nur Berührpunkte mit der *t*-Achse. Wegen der notwendigen endlichen Berechnung treten kleine Fehler auf, die dazu führen, dass die *t*-Achse nicht exakt erreicht wird. Man muss einen kleinen Fehler zulassen, der aber dazu führen kann, dass der Berührpunkt verfehlt wird. Die Berechnung mit der Xi-Funktion $\xi(t)$ ist dagegen sicherer. Es nötigt einem Respekt ab, dass Riemann die ersten drei Nullstellen händisch berechnet hat.



7. Eine Anwendung der Primzahlen - Das RSA - Verfahren

Die Bedeutung der Primzahlen in der Praxis besteht heute darin, dass mit ihrer Hilfe eine sichere Übermittlung von Texten möglich ist.
Dazu ist es notwendig, dass man einen Text, bevor man ihn versendet, zuerst mit dem Schlüssel **d** „verschlüsseln" muss.
Der Empfänger muss ihn dann wieder mit einem passenden Schlüssel **e** „entschlüsseln".
Bei dem RSA-Verfahren[5] werden die Schlüssel **d** und **e** verschieden gewählt, sie sind so genannte „modulo - Inverse".
Das Verschlüsseln und das Entschlüsseln erfolgt über ein Potenzieren modulo N .
Das Verfahren besteht aus folgenden Schritten:

- Vorgabe zweier (großer) Primzahlen p und q - geheim -
- Bilden des Moduls durch $p \cdot q = N$ - öffentlich -
- Schlüssel **d** und **e** berechnen mit:
  $$d \cdot e \equiv 1 \mod [(p-1) \cdot (q-1)] \qquad (*)$$
- Text „ x " mit **e** (öffentlich) „verschlüsseln" und absenden
  $$x^e \bmod N = y$$
- Text „ y " empfangen und mit **d** (geheim) „entschlüsseln"
  $$y^d \bmod N = x$$

Es folgt ein Beispiel. Hier wird das Computerprogramm „ARIBAS" verwendet, um ein realistisches Beispiel zu demonstrieren. Dargestellt werden nur die Ergebnisse.[6]

- Auswahl der geheimen Primzahlen p und q von geeigneter Größe, hier ca. 40 Stellen
- Modul: $N = p \cdot q$
- N = 3_29653_32750_91650_69129_99864_00426_53894_73091_
  _65682_01891_25345_33258_20924_20721_74124_98960_65667
- Verschlüsselter Text (dezimal):
- Y = 68473_96951_27948_92240_77176_08359_01595_18867_66419_
  14023_37982_76087_17223_04518_39969_32878_54247.
- Entschlüsselter Text (hexadezimal):
- X = 4D61_7468_656D_6174_696B_202D_2053_7072_6163_
  6865_2064_6573_2049_6E67_656E_6965_7572_73.
- Entschlüsselter ASCII - Text:
- „Mathematik – Sprache des Ingenieurs"

Die Sicherheit des Verfahrens beruht darauf, dass es sehr schwer ist, eine große Zahl N in ihre Primfaktoren zu zerlegen. Aus der Kenntnis von p und q könnte man dann über die Gleichung (*) zum öffentlichen Schlüssel e den passenden geheimen Schlüssel d berechnen!

Zur numerischen Berechnung der Zetafunktion

Ausschnitte aus [3]: http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_%CE%B6-Funktion

Numerische Berechnung [Bearbeiten]

Es gibt sehr effiziente Methoden, die Zeta-Funktion ohne großen Rechenaufwand numerisch anzunähern. Diese wurden in der Zeit bevor es Rechenmaschinen (geschweige denn Computer) gab dazu verwendet, bestimmte Funktionswerte der Zeta-Funktion auf viele Dezimalstellen genau zu bestimmen. Beispielsweise ermittelte Leonhard Euler 1735 den Wert von $\zeta(2)$ auf ca. 20 Stellen genau, bevor er das Basler Problem, das sich mit dem analytisch „exakten" Wert von $\zeta(2)$ befasste, löste. Diese numerische Auswertung war für ihn die praktische Bestätigung für die Richtigkeit seines exakt ermittelten Wertes.[37]

Des Weiteren fand der dänische Mathematiker Jørgen Pedersen Gram im Jahr 1903 numerische Werte der ersten 15 nicht-trivialen Nullstellen, wobei er die ersten zehn Nullstellen auf 6 und die weiteren fünf auf jeweils 1 Stelle nach dem Komma ermittelte.[38]

Als effektive Methode erweist sich die „abgebrochene" Summenformel, die mit Hilfe der Euler-MacLaurin-Summenformel hergeleitet wird (siehe auch im Abschnitt *Summenformeln*). Hierfür wird zunächst eine beliebige natürliche Zahl N festgelegt, für die außerdem $N > |s|$ gelten sollte. Es gilt dann:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{N-1} n^{-s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} + \frac{1}{2}N^{-s} + \frac{\mathrm{B}_2}{2}sN^{-s-1} + \frac{\mathrm{B}_4}{24}s(s+1)(s+2)N^{-s-3} + \cdots + \frac{\mathrm{B}_{2m}}{(2m)!}s(s+1)\cdots(s+2m$$

wobei das Restglied R_{2m} durch

$$R_{2m}(s) = -\frac{s(s+1)\cdots(s+2m-1)}{(2m)!}\int_N^\infty \mathrm{B}_{2m}(x-[x])x^{-s-2m}\mathrm{d}x$$

gegeben ist. Bei der (freien) Wahl von m sei zu beachten, dass das Restglied nur auf der Halbebene $\mathrm{Re}(s+2m-1) > 1$ konvergiert. Daher muss stets $m > -\mathrm{Re}\,\frac{s}{2}$ gelten. Für größer werdende Werte von N verkleinert sich der Fehler R_{2m} unabhängig von m rapide.[39]

Beispiele [Bearbeiten]

Als ein Beispiel bietet sich die numerische Annäherung des Zahlenwertes von

$$\zeta(2) = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

an. Für eine sehr gute Approximation reichen die Werte $N = 5$ und $m = 2$ vollkommen aus. Einsetzen ergibt:

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{4} n^{-2} + \frac{5^{-1}}{2-1} + \frac{1}{2}5^{-2} + \frac{\mathrm{B}_2}{2}\cdot 2\cdot 5^{-3} + \frac{\mathrm{B}_4}{24}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^{-5} + R_4(2)$$

$$\approx 1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + 4^{-2} + \frac{5^{-1}}{2-1} + \frac{1}{2}5^{-2} + \frac{\mathrm{B}_2}{2}\cdot 2\cdot 5^{-3} + \frac{\mathrm{B}_4}{24}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^{-5}.$$

Die folgende Tabelle zeigt die numerische Auswertung dieser Rechnung.

Term	Numerischer Wert
$1^{-2} =$	$1,00000000$
$2^{-2} =$	$+0,25000000$
$3^{-2} =$	$+0,11111111$
$4^{-2} =$	$+0,06250000$
$\frac{5^{-1}}{2-1} =$	$+0,20000000$
$\frac{1}{2}5^{-2} =$	$+0,02000000$
$\frac{\mathrm{B}_2}{2}\cdot 2\cdot 5^{-3} =$	$+0,00133333$
$\frac{\mathrm{B}_4}{24}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5^{-5} =$	$-0,00001066$
$\zeta(2) \approx$	$1,64493378$

Diese mit wenig Aufwand gewonnene Approximation stimmt mit dem tatsächlichen Wert

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = 1,644934067...$$

bereits in 6 Dezimalstellen (gerundet) nach dem Komma überein.[40]

Analog kann der Dezimalwert von $\zeta(1/2)$ angenähert werden. Hier reicht die Wahl von $N = 4$ und $m = 2$

Term	Numerischer Wert
$1^{-1/2} =$	$1,00000000$
$2^{-1/2} =$	$+0,70710678$
$3^{-1/2} =$	$+0,57735027$
$\frac{4^{1/2}}{\frac{1}{2}-1} =$	$-4,00000000$
$\frac{1}{2}4^{-1/2} =$	$+0,25000000$
$\frac{\mathrm{B}_2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4^{-3/2} =$	$+0,00520833$
$\frac{\mathrm{B}_4}{24}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot 4^{-7/2} =$	$-0,00002034$
$\zeta(1/2) \approx$	$-1,46035496$

Auch dieser Wert stimmt auf 6 Dezimalstellen genau.[41]

Ableitung [Bearbeiten]

Aus: http://en.wikipedia.org/wiki/Lanczos_approximation

Lanczos derived the formula from Leonhard Euler's integral

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}\,dt,$$

performing a sequence of basic manipulations to obtain

$$\Gamma(z+1) = (z+g+1)^{z+1} e^{-(z+g+1)} \int_0^e [v(1-\log v)]^{z-\frac{1}{2}} v^g\,dv,$$

and deriving a series for the integral.

Simple implementation

[edit]

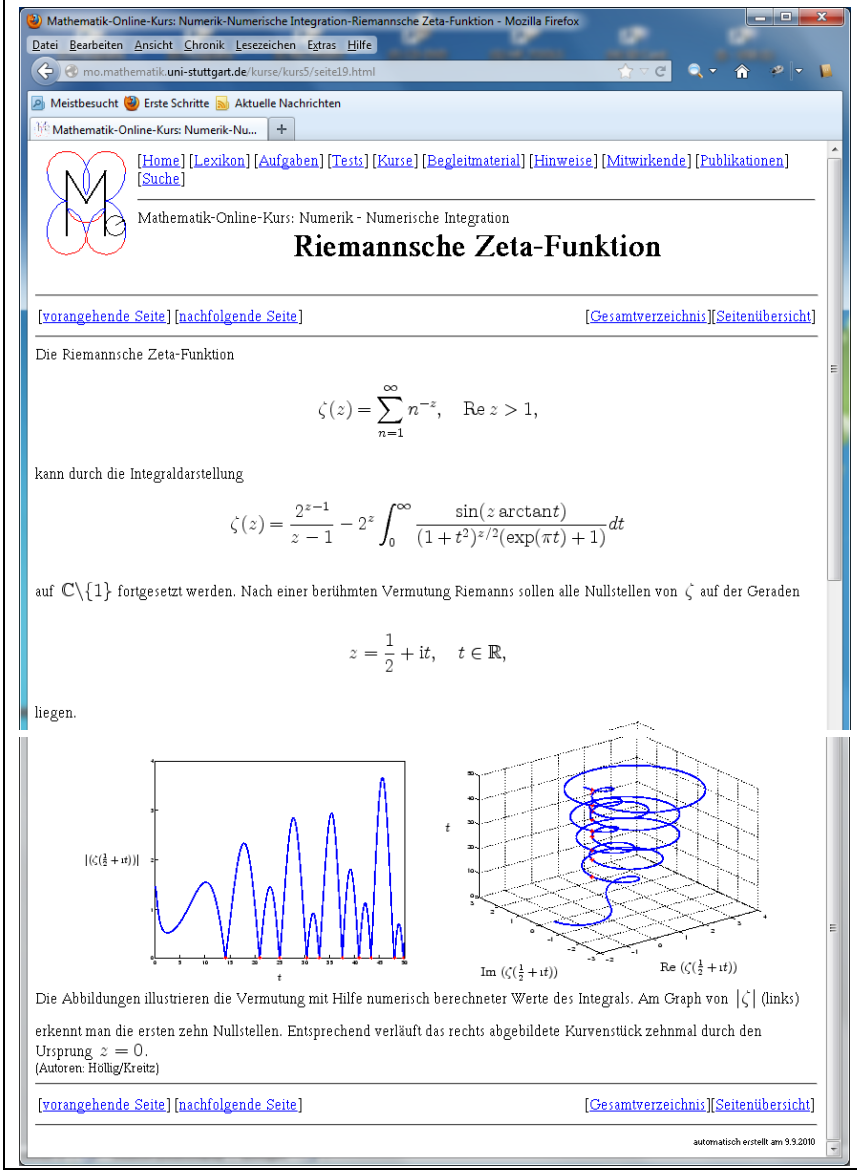
The following implementation in the Python programming language works for complex arguments and typically gives 15 correct decimal places:

```
from cmath import *

# Coefficients used by the GNU Scientific Library
g = 7
p = [0.99999999999980993, 676.5203681218851, -1259.1392167224028,
     771.32342877765313, -176.61502916214059, 12.507343278686905,
     -0.13857109526572012, 9.9843695780195716e-6, 1.5056327351493116e-7]

def gamma(z):
    z = complex(z)
    # Reflection formula
    if z.real < 0.5:
        return pi / (sin(pi*z)*gamma(1-z))
    else:
        z -= 1
        x = p[0]
        for i in range(1, g+2):
            x += p[i]/(z+i)
        t = z + g + 0.5
        return sqrt(2*pi) * t**(z+0.5) * exp(-t) * x
```

See also

[edit]

Aus: http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs5/seite19.html



Mathematik-Online-Kurs: Numerik-Numerische Integration-Riemannsche Zeta-Funktion - Mozilla Firefox

Datei Bearbeiten Ansicht Chronik Lesezeichen Extras Hilfe

mo.mathematik.uni-stuttgart.de/kurse/kurs5/seite19.html

Meistbesucht Erste Schritte Aktuelle Nachrichten

Mathematik-Online-Kurs: Numerik-Nu...

[Home] [Lexikon] [Aufgaben] [Tests] [Kurse] [Begleitmaterial] [Hinweise] [Mitwirkende] [Publikationen] [Suche]

Mathematik-Online-Kurs: Numerik - Numerische Integration

Riemannsche Zeta-Funktion

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

Die Riemannsche Zeta-Funktion

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}, \quad \operatorname{Re} z > 1,$$

kann durch die Integraldarstellung

$$\zeta(z) = \frac{2^{z-1}}{z-1} - 2^z \int_0^{\infty} \frac{\sin(z \arctan t)}{(1+t^2)^{z/2}(\exp(\pi t)+1)} dt$$

auf $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ fortgesetzt werden. Nach einer berühmten Vermutung Riemanns sollen alle Nullstellen von ζ auf der Geraden

$$z = \frac{1}{2} + it, \quad t \in \mathbb{R},$$

liegen.

$|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$ t Im $(\zeta(\frac{1}{2}+it))$ Re $(\zeta(\frac{1}{2}+it))$

Die Abbildungen illustrieren die Vermutung mit Hilfe numerisch berechneter Werte des Integrals. Am Graph von $|\zeta|$ (links) erkennt man die ersten zehn Nullstellen. Entsprechend verläuft das rechts abgebildete Kurvenstück zehnmal durch den Ursprung $z = 0$.
(Autoren: Höllig/Kreitz)

[vorangehende Seite] [nachfolgende Seite] [Gesamtverzeichnis][Seitenübersicht]

automatisch erstellt am 9.9.2010

Zusammenfassung: Die Riemannsche Vermutung zur Zetafunktion

Bernhard Riemann, deutscher Mathematiker, 1826 bis 1866, Berlin, Göttingen, Schüler von Gauß und Dirichlet. Aus den Monatsberichten der Berliner Akademie der Wissenschaften, November 1859, über den Einführungsvortrag von Riemann: "*Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Groesse*".

Der Originaltext von Riemann:

Man findet nun in der That etwa so viel reelle Wurzeln innerhalb dieser Grenzen, und es ist sehr wahrscheinlich, dass alle Wurzeln reell sind. Hiervon wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien. Mit anderen Worten: Alle Nullstellen liegen auf der kritischen Geraden $\boldsymbol{a}$ =1/2.

Die Zetafunktion:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1$$

Nach *Euler* auch:

$$\zeta(s) = \prod_{\text{alle } p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

p = Primzahl

Die von Riemann für $s > 0$ erweiterte Zetafunktion:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

Diese Formel ist für die Berechnung der Zetafunktion im *kritischen Bereich* geeignet.

Für den mathematischen Beweis des Millenium-Problems "Riemannsche Vermutung" hat das amerikanische Clay-Institut ein Preisgeld von **1 Million US-Dollar** ausgelobt; siehe: http://www.claymath.org/millennium/

Weitere Preise gibt es von der ZetaGrid-Organisation; siehe: http://www.zetagrid.net/zeta/prizes.html:

- 1000 US-$ für den ersten Nachweis einer Nullstelle außerhalb der kritischen Gerade mit a = 1/2.
- 100 US-$ für den ersten Nachweis von zwei Nullstellen, die nicht weiter als 10^{-7} auseinander liegen.
- 10 US-$ für den ersten Nachweis von zwei Nullstellen, die nicht weiter als 10^{-6} auseinander liegen.

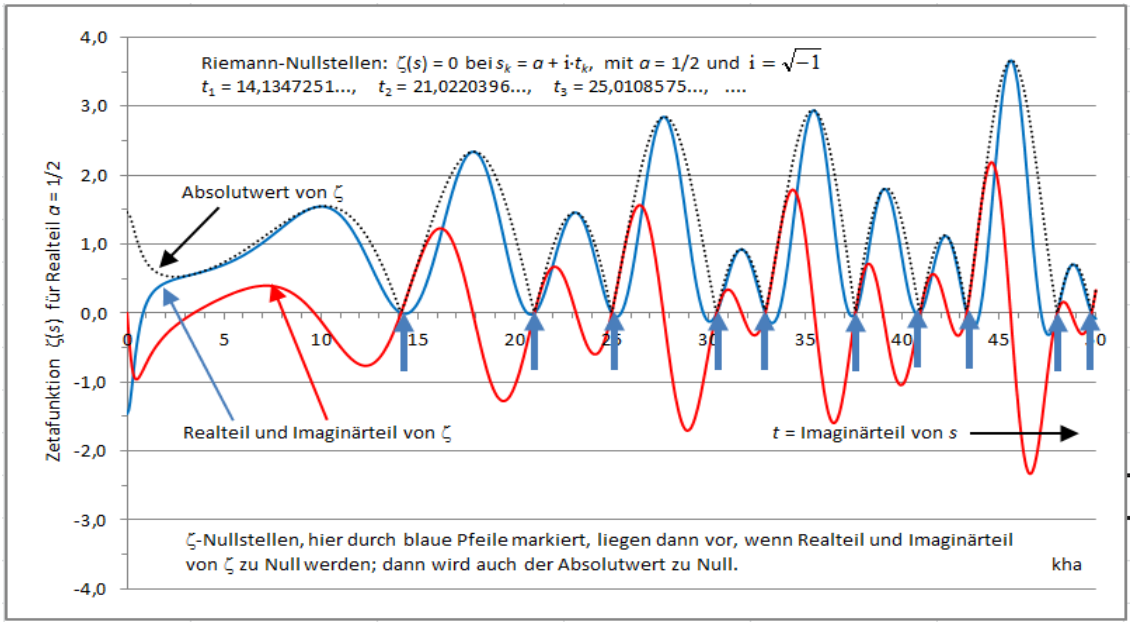


Abbildung 7: Der Verlauf der Zetafunktion für a = 1/2 im t-Bereich von 0 bis 50 und die Riemannschen Nullstellen

Entsprechend der Riemannschen Vermutung wurde bei der Grafikberechnung der Realteil von s mit $\boldsymbol{a}$ = **1/2** angenommen. Man sieht, dass die Zetafunktion an den markierten Stellen mit der Riemann-Annahme zu Null wird.

Alle nummerischen Berechnungen haben bislang Riemann bestätigt. Auch der ZetaGrid-Rechnerverbund, der mit über 11.000 Rechnern zu über 10^{12} Nullstellen geführt hat, hat Riemann bestätigt. Der mathematische Beweis steht aber immer noch aus.

Die Nullstellenwerte der Zetafunktion sind u. a. in der Quantenmechanik von Bedeutung. Es wird vermutet, dass die Nullstellenwerte Informationen über die Primzahlenverteilung enthalten. Auf der praktisch fast unmöglichen Aufspaltung von großen Primzahlprodukten beruht der weit verbreitete RSA-Verschlüsselungsalgorithmus. Experten nehmen an, dass bei einem mathematischen Beweis der Riemann-Vermutung auch einige Geheimnisse der Primzahlen gelüftet und damit RSA obsolet werden könnte. Die "Elliptic Curve Cryptography" (ECC) könnte dann mit seinen wesentlich kürzeren Schlüsseln bei gleicher Sicherheit an Bedeutung zunehmen. Wie aber der Fall SONY-Playstation-Kundenliste im April 2011 gezeigt hat, kann auch ECC bei schlechter Implementierung geknackt werden.

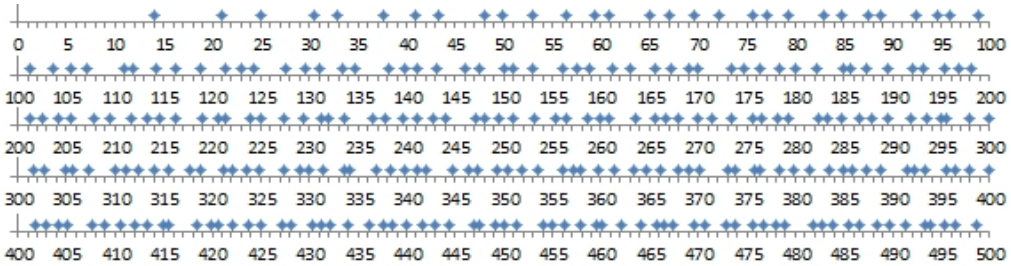


Abbildung 8: Die Nullstellen im Bereich bis 500. Nach Programm "kha-VBC-Zetafunktion und Z(t)-Nullstellen"

Die nummerische Berechnung der Nullstellen ist mit Problemen verbunden, da sowohl Realteil als auch Imaginärteil zu Null werden müssen, siehe Abbildung 7. Grundsätzlich könnte man das Problem mit einer zweidimensionalen Iteration lösen, was aber sehr aufwändig wäre. Man könnte zwar auch den Absolutwert heranziehen, der die Nullstelle mit einem Berührpunkt darstellt. Wegen nummerischer Probleme (Berechnung der unendlichen Summen mit endlicher Schleifenzahl, Binäreffekt) verbietet sich diese Vorgehensweise. Eine Lösung bietet die ebenfalls von Riemann definierte Xi-Funktion $\xi(t)$, die von Carl Ludwig Siegel (deutscher Mathematiker, 1896 bis 1981) um 1932 aus dem Rest-Nachlass von Riemann zur Z-Funktion $Z(t)$ weiterentwickelt wurde. Die Z-Funktion liefert *ein* reelles Ergebnis und besitzt die gleichen Nullstellen wie die Zetafunktion. Durch Vorzeichenwechsel können die Nullstellen erkannt werden, und durch Nachiteration, z. B. mit regula falsi, können die Nullstellen mit der gewünschten Genauigkeit berechnet werden. Alle hier gezeigten Diagramme wurden auf diese Weise mit dem Programm "*kha-VBC-Zetafunktion und Z(t)-Nullstellen*" berechnet. Die berechneten Werte wurden vom Programm in eine Textdatei geschrieben, in Excel importiert und dort in den folgenden Grafiken dargestellt.

Zu den verwendeten Formeln:

Die von Riemann auf die komplexe Zahlenebene erweiterte Zetafunktion $\zeta(s)$ gibt es in vielfältigen Ausgestaltungen: als Summen bis ins Unendliche, als Integrale bis ins Unendliche, mit Gammafunktion $\Gamma(s)$, mit Bernoulli-Zahlen, mit trigonometrischen Funktionen usw. Nur wenige davon sind für nummerische Berechnungen brauchbar. Es werden hier verwendet:

$$\zeta(\boldsymbol{s}) = \frac{1}{1-2^{\boldsymbol{s}}} \sum_{\boldsymbol{n}=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\boldsymbol{n}-1}}{\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{s}}}, \text{ mit: } \boldsymbol{s} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{t}, \quad \boldsymbol{a} = 1/2 \tag{7}$$

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{e}^{\boldsymbol{i}\cdot\vartheta(\boldsymbol{t})} \cdot \zeta(\boldsymbol{s}), \text{ mit: } \vartheta(\boldsymbol{t}) = \arg\left(\Gamma\left(\frac{1}{4} + \boldsymbol{i} \cdot \frac{\boldsymbol{t}}{2}\right)\right) \approx \frac{\boldsymbol{t}}{2} \log \frac{\boldsymbol{t}}{2\pi} - \frac{\boldsymbol{t}}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{1}{48\,\boldsymbol{t}} + \frac{7}{5760\,\boldsymbol{t}^3} + \frac{31}{80640\,\boldsymbol{t}^5}, \quad \boldsymbol{t} > 0 \tag{8}$$

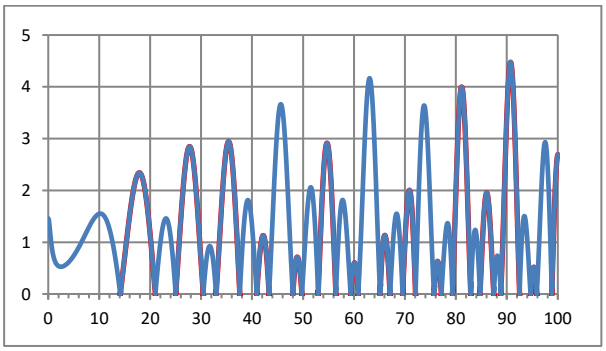


Abbildung 9: Absolutwert der Zetafunktion im Bereich bis 100 mit 29 Nullstellen als Berührpunkte

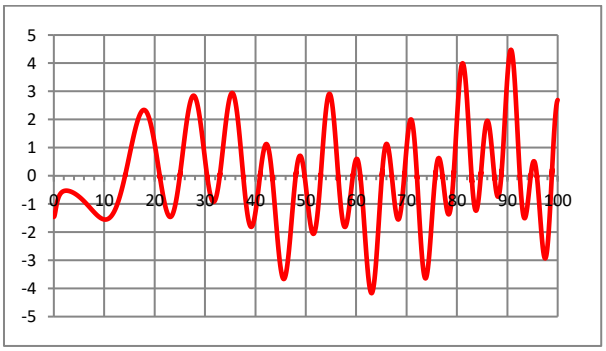


Abbildung 10: Die Z-Funktion $Z(t)$ hat im gleichen Bereich die gleichen Nullstellen wie die Zetafunktion, jedoch mit Vorzeichenwechsel

Die folgenden Abbildungen zeigen die Riemann-Nullstellen mit Hilfe der Z-Funktion $Z(t)$:

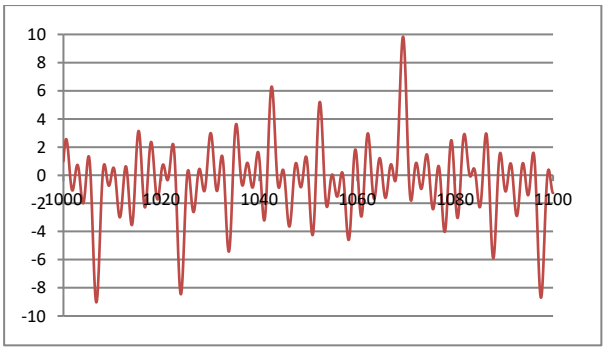


Abbildung 11: Bereich 1000 bis 1100 mit 81 Nullstellen

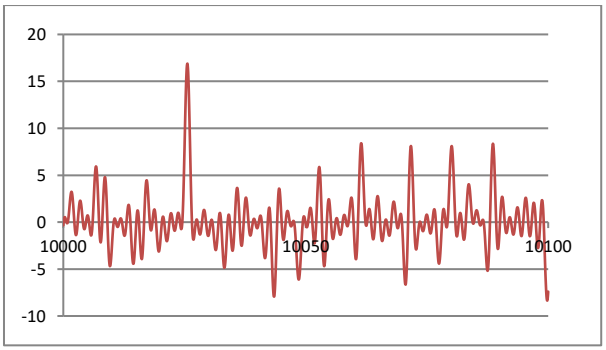


Abbildung 12: Bereich 10.000 bis 10.100 mit 118 Nullstellen

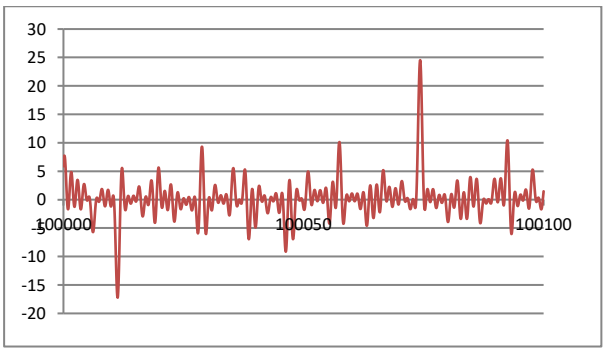


Abbildung 13: Bereich 100.000 bis 100.100 mit 152 Nullstellen

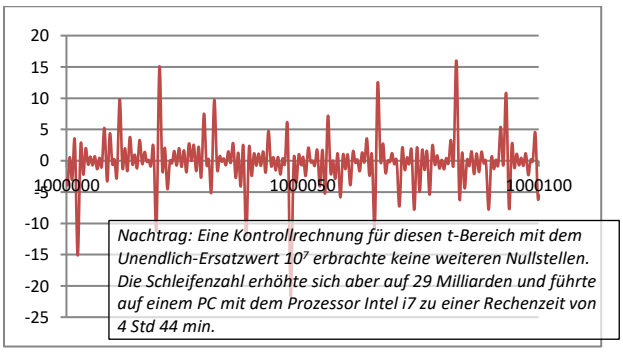


Abbildung 14: Bereich 1.000.000 bis 1.000.100 mit 190 Nullstellen

*Die Berechnungen wurden mit einer t-Schrittweite von 0,1 und mit einer Genauigkeit von 10^{-6} durchgeführt; als Unendlich-Ersatzwert wurde 10^5 gewählt. Es ergaben sich dabei durchschnittlich 5 Nach-Iterationsschleifen. Für die Abbildung 14 musste der Unendlich-Ersatzwert auf 10^6 erhöht werden, um alle Nullstellen zu erfassen. Somit waren für diese Abbildung (100/0,1 + 190*2*5)*10^6 = 2.900.000.000 = 2,9 Milliarden Schleifenberechnungen der Formeln 7 und 8 erforderlich. Mathematiker haben sich zwischenzeitlich ganz spezielle Algorithmen für die schnellere Berechnung der Zetafunktion ausgedacht, aber das ist ein ganz anderes Thema oder siehe ODLYZKO [27], vor dem ein Maschinenbauingenieur vor Ehrfurcht erstarrt, fast so wie vor RIEMANN. Dennoch: Ein Beweis wäre wertvoller als immer neue Bestätigungen. Vorsicht ist angebracht: Ein Mathematiker hat beim Versuch des Riemann-Beweises zeitweise seinen Verstand verloren!*

Aus der Geschichte: AlberEinstein trat bei der Entwicklung seiner Speziellen Relativitätstheorie mathematisch auf der Stelle. Ein Freund verwies ihn auf eine Abhandlung von Riemann über mehrdimensionale Räume und die brachte den Durchbruch. ***Etwas zugespitzt: Immer daran denken: Ohne Riemann gäbe es möglicherweise keine Einsteinsche Relativitätstheorie und somit auch kein Navi!*** *(Auch keine Atombombe?).*

Und weil wir schon bei Einstein sind*: Seine Vorhersage der Gravitationswellen hat sich 2015 erstmals bestätigt. Einstein selbst hatte angenommen, dass der Nachweis wegen der erforderlichen Genauigkeit nicht erbracht werden kann. Die Hochpräzissions-Lasermesstechnik hat die Forderung nach einer Messgenauigkeit von 10^{-21} geschafft. Zur Veranschaulichung: 10^{-21} entspricht die Messung von einem Tausendstel-Millimeter (1 μm) auf eine Entfernung von der Sonne zum nächsten Sternsystem Alpha Centauri mit 4,3 Lichtjahren = 4,3 * 365 * 24 * 3600s * 300.000km/s ≈ 40.600.000.000.000 km = 40.600.000.000.000.000 m = 40.600.000.000.000.000.000.000 μm = 4,06*10^{21} μm. Mit dem Nachweis der Gravitationswellen sind* ***alle*** *Einstein-Vorhersagen bestätigt.*

***... und zum Schluss noch Kurioses**:* Ramanujan-Summen-Beweis: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... ∞ = -1/12

A) Der Beweis mit der Eulerschen-/Riemannschen Zeta-Funktion

Leonhard Euler (siehe später) hat die Zeta-Funktion $\zeta(\boldsymbol{s})$ für positive Argumente definiert und hat für geradzahlige Argumente Berechnungsformeln für $\zeta(\boldsymbol{s})$ abgeleitet. *Bernhard Riemann* (siehe später) hat für seine Untersuchungen über die Anzahl der Primzahlen die Zeta-Funktion auf beliebige komplexe Argumente erweitert. *S. Ramanujan* (sprich "Ramanudschan" o. ä., siehe später) hat gezeigt, dass die Summe aller natürlichen Zahlen nicht unendlich, sondern -1/12 ist.

Hier eine kleine Tabelle für reelle Argumente der Zeta-Funktion, Graphen dazu auf Seite 23.

s	**-∞**	-6	-5	-4	-3	-2	**-1**	0	1	**2**	3	4	5	6	**∞**
$\zeta(\boldsymbol{s})$	...	0	-1/252	0	1/120	0	**-1/12**	-1/2	**∞**	**π^2/6**	...	π^4/96	...	π^6/945	1

Für die Zeta-Funktion $\zeta(s)$ hat Euler wie folgt definiert:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \tag{1}$$

und darüber hinaus gibt es mehrere Funktionsgleichungen, die natürlich alle gleichwertig sind. Das gilt auch für folgende rekursive Funktionsgleichung:

$$\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(1-s)\, \zeta(1-s) \tag{2}$$

Darin ist $\Gamma(..)$ die Gamma-Funktion mit:

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{mit } n! = n\text{-Fakultät} = 1*2*3*...*n \text{ und } 1! = 1 \tag{3}$$

Wir betrachten jetzt nur den Fall ***s*** = -1: Die Zeta-Funktion ergibt sich für diesen Fall zu:

$$\zeta(-1) = 2^{-1}\pi^{-2} \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2)\, \zeta(2) = \frac{1}{2\pi^2} \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) \Gamma(2)\, \zeta(2) \tag{4}$$

Mit $\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1$, $\Gamma(2) = 1$ und $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ (siehe Tabelle oben) erhält man schließlich:

$$\zeta(-1) = -\frac{1}{12} \tag{5}$$

Dieser Wert ist auch aus der Tabelle ersichtlich.

Jetzt zur Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis unendlich: Diese Summe sei mit dem Formelzeichen ***S*** (Groß-S) bedacht:

$$S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \infty = \sum_{i=1}^{\infty} i \tag{6}$$

Durch bloße Ansicht kann man schon absolut sicher sagen, dass diese **Summe Unendlich** ergibt.

Aber jetzt kommt das junge autodidaktische Mathematik-Genie *Ramanujan* aus Indien daher und zeigt im Jahre 1910, dass diese Summe nicht den Wert Unendlich hat, sondern den Wert $-\frac{1}{12}$. Er geht von der Basisdefinition der Zeta-Funktion nach (1) aus, hier nochmal dargestellt:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \cdots \infty \tag{7}$$

und setzt hier ein: *s* = -1 und erhält:

$$\zeta(-1) = 1 + \frac{1}{2^{-1}} + \frac{1}{3^{-1}} + \frac{1}{4^{-1}} + \frac{1}{5^{-1}} + \cdots \infty \tag{8}$$

Bekanntlich gilt: $\frac{1}{a^{-1}} = a$ und somit kann man die letzte Gleichung auch so schreiben und in Verbindung mit Gleichung (5) bringen:

$$\zeta(-1) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \infty = -\frac{1}{12} \tag{9}$$

Das ist genau die Summe ***S*** nach (6), also:

$$\infty = -\frac{1}{12} \tag{10}$$

Unendlich soll gleich $-\frac{1}{12}$ sein? Na, sowas! Mehrere Mathematik-Professoren aus Cambridge wollten *Ramanujan* für verrückt erklären, aber formal scheint seine Behauptung richtig zu sein, oder?

B) Der Ramanujan-Summen-Beweis: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + ... ∞ = -1/12 mit elementarer Mathematik

Zuerst ein Vorgeplänkel mit der Hilfssumme S_1:

$$\boldsymbol{S}_1 = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots = ? \tag{11}$$

Wenn man mit den in Gleichung (12) (eigentlich überflüssigen) Klammern rechnet, dann ist das Ergebnis eindeutig 0.

$$\boldsymbol{S}_1 = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots. = 0 \tag{12}$$

Wenn man dagegen die Klammern so wie in Gleichung (13) setzt, dann ist das Ergebnis eindeutig 1.

$$\boldsymbol{S}_1 = 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - \cdots. = 1 \tag{13}$$

Die Summe $\boldsymbol{S}_1$ kann also sowohl 0 oder 1 sein, im Mittel ½. In dieser Form etwas unbefriedigend.

Jetzt die Umformung der Gleichungsversion (13):

$$S_1 = 1 - [(1-1) + (1-1) + (1-1) + \cdots] \tag{14}$$

Die eckige Klammer entspricht dem $\boldsymbol{S}_1$ nach Gleichung (12), somit:

$$S_1 = 1 - S_1$$

Daraus folgt: $2S_1 = 1,\ bzw.\ \ \boldsymbol{S_1} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$

Das ist schon etwas glaubwürdiger!

Mit der weiteren Hilfssumme S_2 geht es zum eigentlichen Thema:

$$S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \tag{15}$$

$$\begin{aligned} S_3 = 2\,S_2 = S_2 + S_2 = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \ldots \\ 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots \end{aligned} \tag{16}$$

$$S_3 = \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \tag{17}$$

$$S_3 = 2\,S_2 = S_1 \tag{18}$$

Daraus folgt:

$$\boldsymbol{S_2} = \frac{S_1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \tag{19}$$

$$S_4 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots \qquad \textit{siehe Riemann/Ramanujan } (6) \tag{20}$$

$$\begin{aligned} S_4 - S_2 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots \\ -(1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots) \end{aligned} \tag{21}$$

$$S_4 - S_2 = 4 + 8 + 12 + 16 + \cdots \tag{22}$$

Darin kann man die "4" ausklammern und man erhält:

$$S_4 - S_2 = 4\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots) \tag{23}$$

Die runde Klammer entspricht dem $\boldsymbol{S}_4$ nach (20). Somit:

$$S_4 - S_2 = 4\,S_4 \qquad \text{bzw.} \qquad 3\,S_4 = -S_2 \qquad \text{damit } S_4 = -\frac{S_2}{3} \tag{24}$$

Mit S_2 nach (19) erhält man schließlich:

$$S_4 = -\frac{\frac{1}{4}}{3} = -\frac{1}{12} = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots \tag{25}$$

Also: Die Summe aller natürlichen Zahlen ist zwar laienhaft betrachtet unendlich, aber nach *Ramanujan* gilt auch mit elementarer Mathematik exakt:

$$\infty = -\frac{1}{12}, \qquad \text{also unendlich} = -\frac{1}{12}$$

Ist auch die elementare Mathematik zu nichts mehr nütze?

Das scheint so zu sein, denn auch *Harald Schirber* hat diesen Beweis geprüft und für richtig befunden ;-)

C) Einige Hintergrundinformationen

Leonhard Euler
Basel, St. Petersburg, Berlin
1707 – 1783

Bernhard Riemann
Göttingen
1826 – 1866
Jung verstorben an TBC

Sr. Ramanujan
Erode (Indien), Cambridge
1887 – 1920
Jung verstorben an TBC

Zu *Euler*:

https://de.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler

http://www.personalschriften.de/aktuelles/artikelansicht/details/leonhard-euler-1707-1783.html

Euler war nicht nur auf dem Gebiet der Mathematik sehr erfolgreich tätig, sondern auch auf den Gebieten der Mechanik (z. B. Stabknickung), der Strömungslehre, der Astronomie und der Optik. Euler verlor 1735 die Sehfähigkeit auf dem rechten Auge und erblindete 1771 fast vollständig. Dennoch wird Euler mitunter als *Adler der Mathematik* bezeichnet.

Zu *Riemann*:

https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_%CE%B6-Funktion

Für den Beweis der *Riemannschen Vermutung* in Verbindung der Primzahlenanzahl und der komplexen Zeta-Funktion ist immer noch ein Preis von 1 Million US-Dollar ausgesetzt.

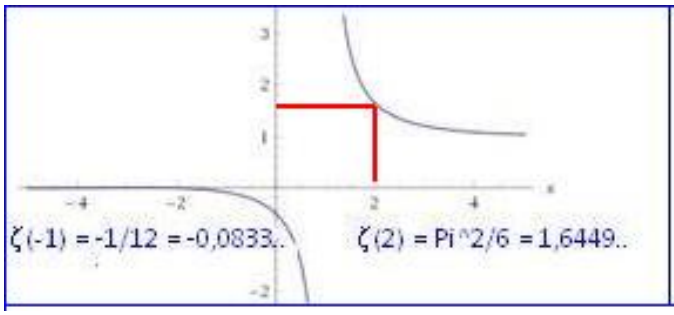
Siehe dazu: https://de.wikipedia.org/wiki/Bernhard_Riemann

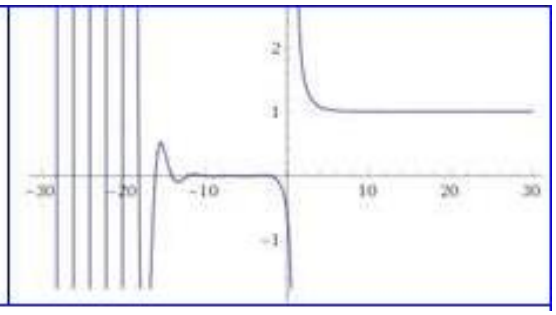
und: http://www.karl-haller.de/Riemann/Riemannsche Vermutung und Zetafunktion.pdf

Es sei darauf verwiesen, dass die Primzahlen bei den modernen Methoden der Datenverschlüsselung eine entscheidende Rolle spielen. Unser Wirtschafts- und auch Privatleben ist im Internet-Zeitalter ohne Datenverschlüsselung nicht mehr denkbar.

Riemann hat die n-dimensionale Differenzialgeometrie begründet. Davon hat *Albert Einstein* bei seiner Relativitätstheorie Gebrauch gemacht. Vierte Dimension bei Einstein ist die Zeit ***t***, genauer ***c*t***, mit ***c*** = Lichtgeschwindigkeit. Das Produkt ***c*t*** hat die Einheit einer Länge.

D) Graphen der Zeta-Funktion ζ(*s*)





Links ζ(*s*) für *s* = -4 .. +4	Rechts ζ(s) für ***s*** = -30 .. +30

Der stark oszillierende Verlauf der Zeta-Funktion z. B. auch zwischen ***s*** = -1 und ***s*** =-4, ist in diesen Graphen nicht gut ersichtlich.